

修士学位論文

散乱振幅から迫るブラックホールと 重力波の物理

The Physics of Black Holes and Gravitational Waves
from Scattering Amplitudes

最終更新日: 2026 年 3 月 30 日

2025 年度
広域科学専攻 相関基礎科学系
31-246904
石川 雅隆

目次

第 1 章	イントロダクション	1
1.1	動機と背景	1
1.2	本修士論文の内容と構成	2
1.3	計量や積分測度、単位系の Notation	3
1.4	修士論文公開にあたって	3
第 2 章	ブラックホール摂動論と Ringdown 重力波	4
2.1	Schwarzschild ブラックホール上の古典スカラー場	4
2.2	Teukolsky 方程式	11
第 3 章	on-shell 散乱振幅と BCFW recursion 公式	24
3.1	spinor-helicity formalism	24
3.2	散乱振幅	28
3.3	4 点 tree 散乱振幅の構成	40
第 4 章	場の量子論を用いたテンプレート波形の計算方法 (KMOC formalism)	61
4.1	散乱振幅における \hbar の戻し方	61
4.2	古典極限を取るための波動関数の条件	61
4.3	2 体散乱時の物理量	65
4.4	放射波形	68
4.5	重力波波形の計算方法	70
4.6	ループダイアグラムについての注意	72
4.7	Tree 散乱振幅からの放射波形の計算	72
4.8	回転する粒子の記述	76
第 5 章	On-shell 散乱振幅を用いた Ringdown 波の計算	82
5.1	吸収・潮汐変形効果	82
5.2	吸収効果とブラックホール背景の場の量子論	86
5.3	散乱振幅を用いた ringdown 波の波形計算	92

第 6 章	まとめと展望	95
6.1	まとめ	95
6.2	展望	96
付録 A	球面調和関数	98
A.1	2 次元球面上のスピン重みつき球面調和関数	98
A.2	4 次元 Lorentz 共変なスピン重みつき球面調和関数	100
付録 B	特殊関数	101
B.1	Beta 関数と Gamma 関数と Polygamma 関数	101
B.2	超幾何関数	103
B.3	Kummer 関数	104
付録 C	Love 数	106
C.1	定義	106
参考文献		108

第1章

イントロダクション

1.1 動機と背景

りんごが地表に落ちるように、我々は日々、重力に惹きつけられている。自然界最速とされる光ですらも引きつけたまま出てこれられないような極限天体、ブラックホールも強重力場から構成される。近年になり、このような極限天体を重力相互作用を通して探索する手段が確立された。そう、重力波観測である。実際にブラックホール同士の合体時に生じる重力波が初めて観測された2015年以来、重力波観測イベントは数百にもものぼる。観測された重力波の解析から、連星合体したブラックホールの質量や角運動量が推定されている。これらの物理量を精度良く推定することは、ブラックホールがどのように誕生したのかなど星形成や天文学的にも重要である。加えて、ブラックホール2体合体過程の初期段階 (inspiral) と合体後の緩和段階 (ringdown) はブラックホール自体の性質や一般相対論を超えた物理を探る上で重要な物理量が観測できる。それは、inspiral 期ではブラックホールの潮汐変化を測る潮汐変形率 (or Love 数) であり、ringdown 期においては緩和時間である。

このような重力波という新しい観測手段を用いた物理量の推定には、合体するブラックホールの質量や角運動量に対応したテンプレート波形を一般相対論を用いて計算しなければならない。それは、物理量の推定が信号解析を用いているからである。つまり、現在の重力波はマイケルソン干渉系を用いて観測されており、重力波信号はハーフミラーの熱雑音のようなノイズの中に埋もれてしまっている。そのノイズの中に、質量や角運動量が決まった合体事象におけるテンプレート波形がどれくらいの尤度で含まれているかを matched-filter 法などの信号解析手法を用いて見積もる。そのため、精度良い重力波観測にはさまざまなパラメタでのテンプレート波形を計算し保持しておく必要がある。つまり、ブラックホールの物理を観測から探索するには、非線形方程式である Einstein 方程式を用いた解析が必要になりこれが厄介となる。コンピュータが発展した今日においては、合体する2つのブラックホールの距離が小さくなり Einstein 方程式の非線形効果が効いてくる合体段階も数値計算を行うことが可能でありテンプレート波形が蓄積されている。しかし、数値計算もハミルトニアン拘束条件運動量拘束条件のようなゲージ固定を満たす初期値を探す時の計算コストや、2天体の質量比が大きい時など計

算コストが大きい合体事象の設定がある。

そのため、解析的にテンプレート波形を計算できるのならば計算した方が良い。合体する 2 天体の距離が十分離れている Inspiral 期や Ringdown 期ではニュートン定数 G_N に関して摂動的に展開し合体天体の質量や角運動量に関して解析的なテンプレート波形が計算されてきた。素朴に Einstein 方程式を摂動的に解くことは摂動の次数が大きくなるにつれて考えるべき項が増え煩雑になる。それらを散乱振幅の計算技術を用いることで系統的に扱うことが可能となり摂動計算の次数を飛躍的に向上させた。高次の摂動次数まで計算した inspiral 期のテンプレート波形を用いることで、ブラックホールの潮汐変形率が観測可能となる。一方、ringdown 波は減衰振動のモード (準固有振動モード QNMs) の線形和になるが実際に観測されている ringdown 波にどの程度の振幅で準固有振動が含まれているかを推定するには推定パラメタが多すぎ過学習してしまう問題がある。この ringdown 波のパラメタ推定にはブラックホールの透過率 (greybody factor) を用いると良いことがわかってきた。近年、ブラックホールの二体問題において、ブラックホールが粒子を吸収する効果を散乱振幅を用いて取り入れる手法が提案された。そこで、その手法を応用して計算した ringdown 波はブラックホール摂動論を用いた波形とどの程度一致するのか、どのような近似から差異が生まれるかを解析することは興味深く、本修士論文ではこれを検証する。

1.2 本修士論文の内容と構成

本修士論文は、2 章で一般相対論を用いたブラックホール摂動論を、3 章で散乱振幅の計算技法を、4 章で場の量子論を用いた古典力学の解析手法をレビューする。5 章でブラックホール合体を on-shell 散乱振幅を用いて記述する方法をレビューし自身の研究活動で得た結果を提示する。最後に 6 章にて本修士論文のまとめと展望について記載する。

散乱振幅を用いた重力波解析の分野はヨーロッパで発展してきている。一方、日本は重力波望遠鏡 KAGRA を保有しているのにも関わらず未だこの分野を専門とする研究者数が少ない。そこで本修士論文では、Srednicki 著の場の量子論の教科書 [1] レベルの知識と Schwarzschild ブラックホール計量の導出したことがある程度の一般相対論の知識から、on-shell 散乱振幅と重力波の物理に関してレビューする。

また、付録として計算を行うときに用いたローレンツ共変な形式での球面調和関数の定義や特殊関数の定義と計算に便利な性質、潮汐変形率 (or Love 数) の定義とブラックホールの Love 数についての性質をまとめる。

1.3 計量や積分測度、単位系の Notation

時空計量は $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ を採用し、特に断らない限り時空の次元は $(3 + 1)$ 次元とする。また D 次元積分測度とデルタ関数にハット[^]をつける notation,

$$\hat{d}^D p := \frac{d^D p}{(2\pi)^D}, \hat{\delta}^D(p) := (2\pi)^D \delta(p) \quad (1.1)$$

及び on-shell 測度 $d\Phi(p)$ と on-shell デルタ関数 $\hat{\delta}_\Phi(k)$ を

$$d\Phi(p) := \hat{d}^4 p \theta(p^0) \hat{\delta}(p^2 + m^2), p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \quad (1.2)$$

$$\hat{\delta}_\Phi(p) := 2p^0 \hat{\delta}^3(\mathbf{p}) \quad (1.3)$$

と定義する。ここで m は粒子の質量、 p^μ は粒子の運動量、 \mathbf{p} は粒子の運動量の空間成分、 $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 計量である。つまり、任意関数 $f(k)$ について上の notation で

$$\int d\Phi(k) \hat{\delta}_\Phi(k - k') f(k) = f(k') \quad (1.4)$$

という直交関係を満たす。また、on-shell 測度が複数の引数を持つときは $d\Phi(p_1, p_2, \dots) := d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) \dots$ とする。

そして、運動量 p にバー⁻をつけると、波数 $\bar{p} = p/\hbar$ を表す。

また、共変微分 ∇_μ をとることを

$$V_{\nu;\mu} := \nabla_\mu V_\nu \quad (1.5)$$

のようにセミコロンで表し、偏微分 ∂_μ を作用させることを

$$V_{\nu,\mu} := \partial_\mu V_\nu \quad (1.6)$$

とコンマで表す。ここで、 \hbar は簡約 Planck 定数 (or Dirac 定数) であり、光速は $c = 1$ とする単位系をとる。

1.4 修士論文公開にあたって

本修士論文に不備や誤植などを発見された場合、ご質問がある場合は、[著者のホームページ](#)

<https://mintoishikawa.github.io/selfintroIshikawa/>

の Contact(連絡先) 欄に記載のメールアドレスよりお知らせいただけますと幸いです。なお、本論文は今後も研究の進展や自身の学習に合わせ、適宜更新を継続していく予定です。

第 2 章

ブラックホール摂動論と Ringdown 重力波

この章では本修士論文の主題であるブラックホール 2 体合体事象に関して説明する。ブラックホールの 2 体合体事象は主に 3 段階に分かれておりそれぞれ、inspiral、merger、ringdown と名前がついている (図 2.1)。Inspiral 段階は合体までの初期段階であり十分離れた 2 天体が Newton 重力に摂動的に一般相対論的效果を含む程度で連星運動している段階、merger は 2 天体が互いに近づき一般相対論的非線形効果が効いてくる段階、ringdown は合体が終わった後定常的な状態に緩和する段階である。

ブラックホール摂動論は背景時空からの摂動について 1 次摂動で切り線形化した方程式を解析する。それは波動方程式でありブラックホール摂動論で摂動ソースから伝播する波の性質について解析できる。ここでは合体後の重力波である ringdown 波形に注目し greybody 因子、準固有振動数、tail 効果についてレビューする。この ringdown 波形はブラックホール背景時空にスカラー、ベクトル、テンソルなどの摂動を加えることで解析できる。Ringdown 波については文献 [2] が詳しい。この章で説明する greybody 因子は、以降の章で述べる散乱振幅を用いた重力波波形の計算手法に吸収効果を取り入れる際の基本となる。特に、極の位置である準固有振動数を、吸収効果の特徴付ける場のスペクトル関数の極の位置に対応させることになる。

この章では幾何単位 ($G = c = 1$) とする。ここで G は Newton 定数で質量次元は -2 である。質量次元の換算から G を戻すことができる。

2.1 Schwarzschild ブラックホール上の古典スカラー場

では、対称性が高く解析やすい例として、静的球対称なブラックホールである Schwarzschild ブラックホールに零質量スカラー場による摂動を考えよう [3]。Schwarzschild ブラックホール

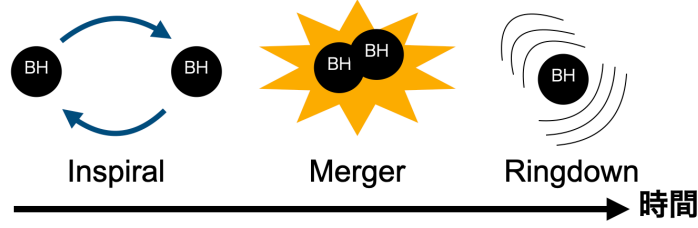


図 2.1 ブラックホール (BH)2 体合体に伴う重力波イベントの段階

の計量 $g_{\mu\nu}$ は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad r_s = 2M \quad (2.1)$$

である。ここで、 r_s は Schwarzschild 半径である。このスカラー場の波動方程式 (Klein-Gordon 方程式) は

$$\square\Phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\Phi = 0 \quad (2.2)$$

である。この方程式の解は時間・動径成分と角度成分に変数分離したモード解で展開できる。Schwarzschild ブラックホール時空は球対称な時空なので、角度成分は球面調和関数を用いて

$$\Phi(t, r, \theta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{u_l(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (2.3)$$

と展開できる。ここで $u_l(t, r)$ は、波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_l(r) \right) u_l = 0, \quad V_l(r) = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (2.4)$$

を満たす。ここで、亀 (tortoise) 座標 $x = r + r_s \log\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)$, $r \in (r_s, \infty) \rightarrow x \in (-\infty, \infty)$ を導入した。 $dx = dr/f(r)$ なので $r \simeq r_s$ の時、 x が大きく変化しても r の変化は小さくなる陸亀 (tortoise) のような座標であり海亀 (turtle) ではない。ポテンシャル V_l をプロットすると以下ようになる (図 2.2)。また、スカラー摂動ではなく空間回転に対してスピン 1 のベクトル摂動、スピン 2 のテンソル摂動を考える場合、ベクトル球面調和関数やテンソル球面調和関数で展開すれば良い。このような展開を行えばポテンシャル項を

$$V_l(r) \rightarrow f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M(1-s^2)}{r^3} \right] \quad (2.5)$$

とスピン s 依存性をつければ良いことが分かり、スカラー場に関するポテンシャル問題に帰着される。

では、動径方向の波動方程式を解いていこう。時間と動径方向に関して変数分離型の方程式であるからまず変数分離しよう。ここでは、上の波動方程式を時間 t に関してラプラス変換し

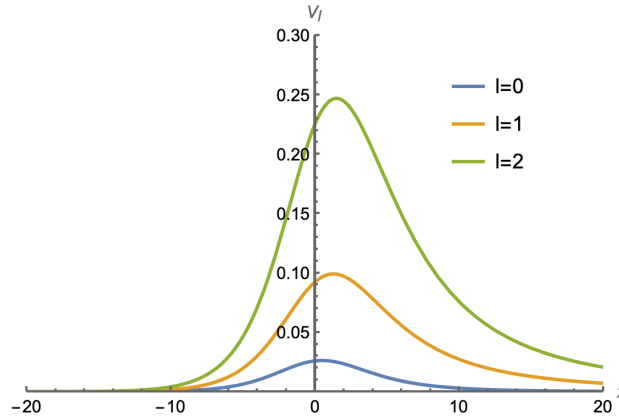


図 2.2 Klein-Gordon 方程式の動径方向成分のポテンシャルの亀座標 x と軌道角運動量 l の依存性

よう。これは上の波動方程式を時刻 $t = 0$ における応答を $t = \infty$ で求める問題設定を考えるため、フーリエ変換ではなくラプラス変換を考える。ラプラス変換 \mathcal{L} は

$$\mathcal{L}[u(x, t)](x, \omega) = \hat{u}(x, \omega) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{i\omega t} dt \quad (2.6)$$

と定義され、逆ラプラス変換は

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{u}](x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \hat{u}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.7)$$

となる。この積分を手計算するのは難しいのでラプラス変換表を用いたり Mathematica で計算する。ここで、ラプラス変換を定義する積分が $t \rightarrow \infty$ において収束するように角振動数 ω は微小に正の虚部だけずらしておく ($0 < \epsilon \ll 1$)。これは減衰振動を考えている時、減衰率を微小にずらしていることに対応しており減衰が最小のモードは減衰率が消えず有限の値を持つので物理的には問題ない。

それでは、初期時刻 $t = 0$ においてスカラー場の配位が $u_l(x, t)|_{t=0}, \partial_t u_l(x, t)|_{t=0}$ と与えられている。この時、上の波動方程式をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_l(r)\right)u_l\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 - V_l(r)\right)\hat{u}_l(x, \omega) = i\omega u_l(x, 0) - \partial_t u_l(x, 0) \quad (2.8)$$

となる。ここで、ラプラス変換の性質

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{i\omega t} dt = [f(t) e^{i\omega t}]_{t=0}^{t=\infty} - i\omega \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = -f(0) - i\omega \hat{f}(\omega) \quad (2.9)$$

を用いた。右辺のソース項 $I_l(x, \omega) := i\omega u_l(x, 0) - \partial_t u_l(x, 0)$ は初期条件から来ている。以下で定義されるグリーン関数 $\hat{G}_l(x, y, \omega)$ を求め、畳み込み積分をすれば波動方程式の解を振動

数表示で求めることができる:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 - V_l(r)\right)\hat{G}_l(x, y, \omega) = \delta(x - y), \quad (2.10)$$

$$\hat{u}_l(x, \omega) = I_l * \hat{G} = \int_{-\infty}^{\infty} I_l(y, \omega)\hat{G}_l(x, y, \omega)dy. \quad (2.11)$$

時間表示では

$$u_l(x, t) = - \int dy [G_l(x, y, t)\partial_t u_l(x, 0) + u_l(x, 0)\partial_t G_l(x, y, t)],$$

$$G_l(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{G}_l(x, y, \omega)] \quad (2.12)$$

となる。それでは、Green 関数を求めていこう。今考えている方程式 (2.10) は x に関して 2 階線形微分方程式なので Green 関数を機械的に構成できる。その構成法は 2 階線形微分作用素を $D_x = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$ とすると、まず初めに線型独立な斉次微分方程式 $D_x[y(x)] = 0$ の解を一つずつ見つけ $y_1(x), y_2(x)$ とする。 y_1, y_2 に関する Wronskian $W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ は $W(x) = \exp(-\int^x p(X)dX) \neq 0$ とかける。この時 $D_x[G(x, y)] = \delta(x - y)$ の解である Green 関数は

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} [\theta(y - x)y_1(x)y_2(y) + \theta(x - y)y_1(y)y_2(x)] \quad (2.13)$$

と求めることができる。ここで $\theta(x)$ はステップ関数である。

方程式 (2.10) に戻ると、これは $p(x) = 0$ の場合なので Wronskian は動径方向 x に依存せず周波数のみに依存する。線型独立な斉次解 $\hat{u}_l^{\text{in/up}}(x, \omega)$ を $x = \pm\infty$ の漸近形で区別すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 - V_l(r)\right)\hat{u}_l^{\text{in/up}}(x, \omega) = 0, \quad (2.14)$$

$$\hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega) = \begin{cases} e^{-i\omega x} & (x \rightarrow -\infty) \\ A_{\text{out}}(\omega)e^{i\omega x} + A_{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega x} & (x \rightarrow \infty) \end{cases}, \quad (2.15)$$

$$\hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega) = \begin{cases} B_{\text{out}}(\omega)e^{i\omega x} + B_{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega x} & (x \rightarrow -\infty) \\ e^{i\omega x} & (x \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (2.16)$$

となる。波動方程式のポテンシャルが $x \rightarrow \pm\infty$ の時消えるので、 $x \rightarrow \pm\infty$ で解は漸近的に平面波 $e^{i\omega x}$ となる。これらの解の Wronskian $W(\omega) = \hat{u}_l^{\text{in}}\partial_x\hat{u}_l^{\text{up}} - (\partial_x\hat{u}_l^{\text{in}})\hat{u}_l^{\text{up}} = -2i\omega A_{\text{in}}(\omega)$ となる。したがって Green 関数 $\hat{G}_l(x, y, \omega)$ は

$$\hat{G}_l(x, y, \omega) = -\frac{1}{2i\omega A_{\text{in}}(\omega)} [\theta(y - x)\hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega)\hat{u}_l^{\text{up}}(y, \omega) + \theta(x - y)\hat{u}_l^{\text{in}}(y, \omega)\hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega)] \quad (2.17)$$

となる。直観的には x がスカラー波の観測者の亀座標で、ソース項と畳み込みする y はスカラー摂動源の動径座標である。

Green 関数の近似的な表式を計算していく。スカラー波の観測者はブラックホールから十分離れている ($x \gg r_s$)、重力波の初期条件はブラックホールから離れたところに局在している ($r_s \ll y \ll x$) と近似すると

$$\hat{G}_l(x, y, \omega) \simeq -\frac{1}{2i\omega A_{in}(\omega)} \hat{u}_l^{\text{in}}(y, \omega) \hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega) \simeq -\frac{1}{2i\omega} \left(e^{i\omega(x-y)} + \frac{A_{out}}{A_{in}} e^{i\omega(x+y)} \right) \quad (2.18)$$

である。第一項はソースから直接観測されるスカラー波、第二項はブラックホールに反射されてから観測されるスカラー波である。後者は減衰振動することが計算するとわかり ringdown 波に対応する。ここで、反射率 $R(\omega)$ 、透過率 $T(\omega)$ を定義する。 $\hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega)$ は無限遠から A_{in} の振幅で入射した波動が振幅 1 でブラックホール内部にポテンシャルを透過して吸収され、振幅 A_{out} で反射されて無限遠に帰ってくる解である。したがって、

$$R(\omega) = \frac{A_{out}}{A_{in}}, \quad T(\omega) = \frac{1}{A_{in}} \quad (2.19)$$

である。ここで、greybody 因子 $\Gamma(\omega)$ は透過率の大きさの二乗で定義される。

$$\Gamma(\omega) := |T(\omega)|^2 \quad (2.20)$$

ここで greybody という名前の由来を述べる。ブラックホールは準古典的には黒体放射をする。この事象の地平面から放出された Hawking 放射はポテンシャルを透過した分だけ無限遠に観測される。つまり、周波数領域での Hawking 放射の強度は透過率の 2 乗の分だけ black から grey になるように減少するという事に寄る。

■時間領域の Ringdown 波形計算公式 周波数領域のスカラー波 $\hat{u}_l(x, \omega)$ は $I_l(x, \omega)$ をソース項として (2.11) のようにかけていた。これに $x \gg 1$ という近似下での Green 関数の表示を代入すれば

$$\hat{u}_l(x, \omega) = -\frac{e^{i\omega x}}{2i\omega} \frac{A_{out}(\omega)}{A_{in}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dy I_l(y, \omega) \left(e^{i\omega y} + \frac{A_{in}}{A_{out}} e^{-i\omega y} \right) \quad (2.21)$$

である。Ringdown 波形に対応するのは反射率 $R(\omega) := \frac{A_{out}(\omega)}{A_{in}(\omega)}$ (2.19) を用いれば

$$\hat{u}_l^{\text{ring}}(x, \omega) = -\frac{R(\omega)}{2i\omega} e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} dy I_l(y, \omega) e^{i\omega y} \quad (2.22)$$

である。ソースは動径方向 $y = y_0$ に十分局在しているデルタ関数的な状況を考え

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy I_l(y, \omega) e^{i\omega y} = \text{const.} \quad (2.23)$$

とかけると仮定する。この定数を 2π とおくような摂動の初期振幅をとると実際の観測される ringdown 波形を再現する [4]。逆ラプラス変換することで時間領域の Ringdown 波形は

$$u_l(t-x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-x)}}{2i\omega} \mathcal{R}_l(\omega) \quad (2.24)$$

と求まる。

それでは、ringdown 波が減衰振動することを周波数表示の ringdown に対応する Green 関数を ω の複素関数として解析することでみよう。逆ラプラス変換の実積分の際に、 ω に関する下半平面の極からの寄与が準固有振動数、分岐線からの寄与が tail 効果を生み出すことを説明する。

■**準固有振動数** Green 関数の表式 (2.18) は $A_{in}(\omega) = 0$ に極を持つ。これは入射波がない時に、ブラックホールの周りのポテンシャルから波動がブラックホールと無限遠に放出される状況に対応する。一位の極だと仮定すると $A_{in} \sim \alpha_{ln}(\omega - \omega_{ln})$ と表せる。ここで ω_{ln} を準固有振動数という。時間領域の Green 関数を求める時の積分を ω に関する複素平面での周回積分に直す。時間が十分経過した $t \rightarrow \infty$ での表示を求めたいので複素積分経路を下半平面にとり分岐線を負の虚数部分にとる。分岐線を避けた経路を取るなので経路内に $\omega = 0$ は含まれていないことに注意する。留数定理から

$$G(x, y, t) \supset \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} e^{-i\omega(t-x-y)} \left(\frac{A_{out}}{2i\omega A_{in}} \right) d\omega = \sum_n \frac{A_{out}(\omega_{ln})}{2\omega_{ln}\alpha_{ln}} e^{-i\omega_{ln}(t-x-y)} \quad (2.25)$$

となる。ここで、 n は減衰率をラベルする準固有振動数の overtone 数と呼ばれ n が大きい程減衰率が大きい。また、 $E_{ln} = \frac{A_{out}}{2\omega_{ln}\alpha_{ln}}$ は Excitation factor である。準固有振動数を求める計算技術として WKB 法 [5]、Leaver 法 [6-8]、monodromy 法 [9, 10] などがある。

■**Late-time tail 効果** 波動方程式 (2.14) は $\hat{u}_l = \psi_l / \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}$ と変数変換すると

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{(1 - \frac{r_s}{r})^2} \left\{ \omega^2 - (1 - \frac{r_s}{r}) \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_s^2}{4r^4} \right\} \right] \psi_l = 0 \quad (2.26)$$

となる。 $r_s \ll r$ の時、波動方程式は近似的に

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2 + \frac{2r_s\omega^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi_l = 0 \quad (2.27)$$

と表され、 $\psi_l = \left(\frac{2r}{r_s} \right)^{l+1} e^{i\omega r} \phi(z)$, $z = -2i\omega r$ と変数変換すると

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (2l+2-z) \frac{d}{dz} - (l+1 - i\omega r_s) \right] \phi(z) = 0 \quad (2.28)$$

となる。付録 B にある Kummer 関数を用いれば、観測者がブラックホールから十分離れているところ $r \gg r_s$ で

$$\hat{u}_l^{\text{in}} \simeq A \left(\frac{r}{r_s} \right)^{l+1} e^{i\omega r} M(l+1 - ir_s\omega, 2l+2; -2ir\omega), \quad (2.29)$$

$$\hat{u}_l^{\text{up}} \simeq B \left(\frac{r}{r_s} \right)^{l+1} e^{i\omega r} U(l+1 - ir_s\omega, 2l+2; -2ir\omega) \quad (2.30)$$

と漸近形を求めることができる。これらの漸近解を Green 関数の表式に入れると、分岐線上での積分の寄与は

$$G(x, y, t) \supset \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^0 \left[\frac{\hat{u}_l^{\text{in}}(y, \omega e^{2i\pi}) \hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega e^{2i\pi})}{W(\omega e^{2i\pi})} - \frac{\hat{u}_l^{\text{in}}(y, \omega) \hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega)}{W(\omega)} \right] e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.31)$$

となる。第一種 Kummer 関数 $M(l+1-ir_s\omega, 2l+2; -2ir\omega)$ は ω に関して一価関数であり、第二種 Kummer 関数 $U(a, b; z)$ は $b \in \mathbb{Z}_{>0}$ の時 \log と同様な多価関数である:

$$U(a, n+1; ze^{2\pi i}) = U(a, n+1; z) - 2\pi i \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(a-n)} M(a, n+1; z). \quad (2.32)$$

一般の $b \in \mathbb{C}$ についての多価性は $m \in \mathbb{Z}$ として

$$U(a, b; ze^{2\pi im}) = e^{-2\pi ibm} U(a, b; z) + 2\pi i \frac{e^{-i\pi bm} \sin(\pi bm)}{\Gamma(1+a-b) \sin(\pi b)} \left(\frac{M(a, b; z)}{\Gamma(b)} \right) \quad (2.33)$$

と $z=0$ に分枝点を持つ。ちなみに、 $M(a, b; z)/\Gamma(b)$ は a, b, z に関して正則であり第一種 Kummer 関数の b に関しての極は Gamma 関数の極由来である。つまり、 ω に関する多価性は $\hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega e^{2\pi i}) = \hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega) + \# \hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega)$ のみに由来する。係数 $\#$ は Wronskian を用いれば

$$\begin{aligned} (2.31) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{-i\infty} \hat{u}_l^{\text{in}}(y, \omega) \hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega) \frac{W[\hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega), \hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega e^{2\pi i})]}{W(\omega)^2} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{iB}{(2l+1)! A} \int_{-i\infty}^0 \frac{\hat{u}_l^{\text{in}}(y, \omega) \hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega)}{2\Gamma(-l-1-ir_s\omega) W(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.34)$$

であり、 $W(\omega)$ は r 依存性がないので $r \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$ で評価して良く

$$\begin{aligned} W(\omega) &= W[\hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega), \hat{u}_l^{\text{up}}(x, \omega)] = ABW \left[\left(\frac{r}{r_s} \right)^{l+1} e^{i\omega r} M, \left(\frac{r}{r_s} \right)^{l+1} e^{i\omega r} U \right] \\ &= AB \left(\frac{r}{r_s} \right)^{2l+2} e^{2i\omega r} W[M[l+1-ir_s\omega, 2l+2; -2ir\omega], U[l+1-ir_s\omega, 2l+2; -2ir\omega]] \\ &= AB \left(\frac{r}{r_s} \right)^{2l+2} e^{2i\omega r} (-2i\omega) \frac{-(-2ir\omega)^{-2l-2} e^{-2ir\omega} \Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-ir_s\omega)} \\ &= \frac{2i\omega (-1)^{l+1} AB (2l+1)!}{(2r_s\omega)^{2l+2} \Gamma(l+1-ir_s\omega)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる。ここで

$$W[f(r)M(r), g(r)U(r)] = f(r)g(r)W[M, U] + M(r)U(r)W[f, g], \quad (2.36)$$

$$W[M(a, b; z), U(a, b; z)] = -\frac{z^{-b} e^z \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \quad (z \text{ についての関数として}) \quad (2.37)$$

を用いた。したがって

$$\begin{aligned} (2.31) &= \frac{-(-4)^l (r_s)^{2l+2}}{A^2 ((2l+1)!)^2} \int_{-i\infty}^0 \hat{u}_l^{\text{in}}(x, \omega) \hat{u}_l^{\text{in}}(y, \omega) \frac{\omega^{2l+1} \Gamma(l+1-ir_s\omega)}{\Gamma(-l-1-ir_s\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{(-4)^l (xy)^{l+1}}{\{(2l+1)!\}^2} \int_0^{-i\infty} \frac{\omega^{2l+1} \Gamma(l+1-ir_s\omega)}{\Gamma(-l-1-ir_s\omega)} M[a, b; -2ix\omega] \\ &\quad \times M[a, b; -2iy\omega] e^{-i\omega(t-x-y)} d\omega \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる。ここで $a = l + 1 - ir_s\omega$, $b = 2l + 2$ である。重力波が生じてから十分時間が経過した $t \gg 1$ で観測者はスカラー波を観測する状況で、上の積分は ω の最低次で近似してよく

$$\begin{aligned}
(2.31) &\simeq \frac{(-4)^l (xy)^{l+1}}{\{(2l+1)!\}^2} \int_0^{-i\infty} \frac{ir_s \omega^{2l+2} l!(l+1)!}{(-1)^l} e^{-i\omega(t-x-y)} d\omega \\
&= \frac{ir_s 4^l (xy)^{l+1} l!(l+1)!}{\{(2l+1)!\}^2} \int_0^{-i\infty} \omega^{2l+2} e^{-i\omega(t-x-y)} d\omega \\
&= \frac{ir_s (l+1) (xy)^{l+1}}{\{(2l+1)!!\}^2} (i\partial_t)^{2l+2} \frac{1}{i(t-x-y)} \\
&= \frac{r_s (l+1) (-xy)^{l+1}}{\{(2l+1)!!\}^2} (2l+2)! (t-x-y)^{-(2l+3)} \propto \frac{1}{t^{2l+3}} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

と Late-time tail 効果に関する Price の法則が導出できた [11]。ここで

$$\Gamma(-l-1-ir_s\omega) = \frac{(-1)^l}{(l+1)!(ir_s\omega)} + \mathcal{O}(\omega^0) \quad (2.40)$$

を用いた。

2.2 Teukolsky 方程式

散乱振幅からの結果と比較するのは前節までの Schwarzschild ブラックホールの greybody 因子であるが、この節では静的球対称という仮定を緩めてみよう。具体的に、固定軸回りで定常的に回転するブラックホールである Kerr ブラックホールにテンソル場による摂動 (計量の摂動) を考えよう。これも Schwarzschild ブラックホールの時と同様にスカラー、ベクトル、テンソル摂動の区別はスピン s で表記したスカラー場の波動方程式、Teukolsky 方程式 [12] に帰着される。その過程で、重力波を扱う時に便利となる vierbein の取り方 (Newman-Penrose 形式) について説明する。Teukolsky 方程式導出の流れは、まず曲率テンソルを物質からの寄与であるリッチテンソルと純粋に計量からの寄与である Weyl テンソルに分ける。それぞれを null vierbein を用いて Newman-Penrose scalar (NP スカラー) に分け、outgoing の重力波に対応する NP スカラーを特定する。それら NP スカラーを用いて Bianchi 恒等式と Einstein 方程式を記述し組み合わせることで Teukolsky 方程式を得る。これらの導出及びブラックホール摂動論は教科書 [13] が詳しい。

Kerr 時空の計量はブラックホールの質量を M , 角運動量を J とすると

$$\begin{aligned}
ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\
& + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.41)
\end{aligned}$$

と表される。ここで、 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $a = J/M$ である。この時空は事象の地平面を持ち、事象の地平面は

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2.42)$$

に位置する。また、上の Boyer–Lindquist 座標系に対して静止している観測者のベクトル $\partial_t = \chi^\mu \partial_\mu$ は Killing ベクトルで、事象の地平面の外部領域 $r > r_+$ で timelike ベクトルから spacelike ベクトルに変わる:

$$g_{\mu\nu}\chi^\mu\chi^\nu = g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right). \quad (2.43)$$

Killing ベクトル ∂_t が spacelike になる領域を ergo 球といい、null となる領域を ergo 球面という。ergo 球面の位置 $r_{erg}(\theta)$ は

$$g_{tt} = 0 \Leftrightarrow r_{erg}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (2.44)$$

であり、ergo 球は $r < r_{erg}(\theta)$ である。つまり、因果的に繋がった時空で測地線運動をする物体のエネルギーを定義する Killing ベクトル ∂_t が、ergo 球内では spacelike となり負のエネルギーを取り得る。

Boyer–Lindquist 座標系での vierbein e_A^μ ($A = 0, 1, 2, 3$) を定義する。Vierbein は $g_{\mu\nu}e_A^\mu e_B^\nu = \eta_{AB}$ と各時空点でミンコフスキー計量となる基底である。Boyer–Lindquist 座標系では時間方向の e_0^μ と空間方向の e_i^μ ($i = 1, 2, 3$) は

$$(e_0)^\mu = \frac{1}{\sqrt{\Delta\Sigma}}(r^2 + a^2, 0, 0, a), \quad (2.45)$$

$$(e_1)^\mu = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}(0, 1, 0, 0), \quad (2.46)$$

$$(e_2)^\mu = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}(0, 0, 1, 0), \quad (2.47)$$

$$(e_3)^\mu = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}(a \sin \theta, 0, 0, \frac{1}{\sin \theta}) \quad (2.48)$$

ととると良い。括弧の中身はそれぞれ順に t, r, θ, φ 成分である。重力波を扱う時はヌルベクトルで基底を張り直した方が良い。例えば、時間方向の outgoing ヌルベクトルと ingoing はそれぞれ

$$(e_0)^\mu + (e_1)^\mu, \quad (e_0)^\mu - (e_1)^\mu \quad (2.49)$$

であり、空間回転の方向は

$$(e_2)^\mu \pm i(e_3)^\mu \quad (2.50)$$

と複素ベクトルにするとヌル条件を満たす。任意の実関数 λ, Λ にして実のヌルベクトル l^μ, n^μ と複素なヌルベクトル m^μ を

$$l^\mu := \Lambda((e_0)^\mu + (e_1)^\mu), \quad n^\mu := \frac{1}{2\Lambda}((e_0)^\mu - (e_1)^\mu), \quad (2.51)$$

$$m^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\lambda}((e_2)^\mu + i(e_3)^\mu), \quad m^{*\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda}((e_2)^\mu - i(e_3)^\mu) \quad (2.52)$$

と定義すると $l^2 = n^2 = m^2 = 0$ であり

$$-l^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu^* = 1 \quad (2.53)$$

という規格化条件と

$$l^\mu m_\mu = l^\mu m_\mu^* = n^\mu m_\mu = n^\mu m_\mu^* = 0 \quad (2.54)$$

という直交条件を満たす。この Λ, λ の任意性は vierbein に関する局所ローレンツ変換のパラメタ由来である。これは後に重力波のスピンを求めるときに用いる。このヌル vierbein を用いて Boyer-Lindquist 座標系で表した Kerr 計量を書くと

$$g^{\mu\nu} = -2l^{\{\mu} n^{\nu\}} + 2m^{\{\mu} m^{*\nu\}} \quad (2.55)$$

と計算の見通しが良くなる。今、4次元時空を考えているのでこれらのヌル vierbein をヌル tetrad ともいう。特に実関数 Λ, λ を

$$e^{i\lambda} = \sqrt{\frac{r - ia \cos \theta}{r + ia \cos \theta}}, \quad \Lambda = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} \quad (2.56)$$

と選んだ時、Kinnersley のヌル tetrad という。具体的に Kinnersley のヌル tetrad を成分表示すると

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \quad n^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}, -\frac{\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma} \right), \quad (2.57)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right), \quad (2.58)$$

$$m^{*\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left(-ia \sin \theta, 0, 1, \frac{-i}{\sin \theta} \right) \quad (2.59)$$

である。以降、ヌル tetrad と言えば、Kinnersley のヌル tetrad を指す。

規格化した互いに直交するヌル tetrad で記述すると計量の表示も簡潔になり Kerr 時空周りの摂動論の計算も見通しが良くなる。そこで、tetrad 形式を導入しよう。Kerr 時空上のベクトル V^μ に対して

$$V_A := V^\mu (e_A)^\mu \quad (2.60)$$

と tetrad に射影した成分をアルファベットで書くことにする。2階のテンソル $T_{\mu\nu}$ に関しても同様に

$$T_{AB} := T_{\mu\nu} (e_A)^\mu (e_B)^\nu \quad (2.61)$$

と定義される。 n 階のテンソルに関しても同様である。これら V_A, T_{AB} は時空の一般座標変換に関してスカラーであることに注意する。つまり、tetrad の定義は計量 $g_{\mu\nu}$ を tetrad 形式にした時の成分表示が η_{AB} ということである。それでは、曲率テンソルを tetrad 形式にしよう。そのための準備として Ricci 回転係数 γ_{ABC} を導入しよう。

$$\gamma_{ABC} := (e_A)^\mu (e_B)_{\mu;\nu} (e_C)^\nu \quad (2.62)$$

Ricci 回転係数の定義は符号が異なる時があるので注意である。Ricci 回転係数は

$$\begin{aligned}\gamma_{ABC} &= [(e_A)^\mu (e_B)_\mu]_{;\nu} (e_C)^\nu - (e_A)^\mu_{;\nu} (e_B)_\mu (e_C)^\nu \\ &= (\eta_{AB})_{;\nu} (e_C)^\nu - (e_B)^\mu (e_A)_{\mu;\nu} (e_C)^\nu = -\gamma_{BAC}\end{aligned}\quad (2.63)$$

と前の添え字 2 個に関して反対称である。曲率テンソル $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}$ の定義から

$$(e_A)_{\mu;\nu\lambda} - (e_A)_{\mu;\lambda\nu} = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} (e_A)_\rho \quad (2.64)$$

となるので、曲率テンソルの tetrad 形式 R_{ABCD} は

$$R_{ABCD} = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} (e_A)_\rho (e_B)^\mu (e_C)^\nu (e_D)^\lambda \quad (2.65)$$

となる。それでは、tetrad 形式の曲率テンソルを構成する $(e_A)_{\mu;\nu\lambda} (e_B)^\mu (e_C)^\nu (e_D)^\lambda$ を Ricci 回転係数で書き表すと、

$$\begin{aligned}(e_A)_{\mu;\nu\lambda} (e_B)^\mu (e_C)^\nu (e_D)^\lambda &= [(e_A)_{\mu;\nu} (e_B)^\mu (e_C)^\nu]_{;\lambda} - (e_A)_{\mu;\nu} (e_B)^\mu_{;\lambda} (e_C)^\nu (e_D)^\lambda \\ &\quad - (e_A)_{\mu;\nu} (e_B)^\mu (e_C)^\nu_{;\lambda} (e_D)^\lambda \\ &= \gamma_{BAC,\lambda} (e_D)^\lambda - g^{\mu\sigma} (e_A)_{\mu;\nu} (e_B)_{\sigma;\lambda} (e_C)^\nu (e_D)^\lambda - g^{\nu\sigma} (e_A)_{\mu;\nu} (e_B)^\mu_{;\sigma} (e_C)_{\sigma;\lambda} (e_D)^\lambda \\ &= \gamma_{BAC,\lambda} (e_D)^\lambda - \eta^{EF} (e_E)^\mu (e_F)^\sigma (e_A)_{\mu;\nu} (e_B)_{\sigma;\lambda} (e_C)^\nu (e_D)^\lambda \\ &\quad - \eta^{EF} (e_E)^\nu (e_F)^\sigma (e_A)_{\mu;\nu} (e_B)^\mu_{;\sigma} (e_C)_{\sigma;\lambda} (e_D)^\lambda \\ &= -\gamma_{ABC,D} - \eta^{EF} \gamma_{EAC} \gamma_{FBD} - \eta^{EF} \gamma_{BAE} \gamma_{FCD}\end{aligned}\quad (2.66)$$

となる。ここで、2 行目では初項が時空の添字を持っていないので共変微分が偏微分が変わることを、3 行目の第 2 項と第 3 項には tetrad の定義式 $g^{\mu\nu} = (e_A)^\mu (e_B)^\nu \eta^{AB}$ を、4 行目では Ricci 回転係数の前 2 つの添え字に関する反交換関係を用いた。また、tetrad のラベルでのコンマは

$$V_{A,B} := V_{A,\lambda} (e_B)^\lambda \quad (2.67)$$

と定義されている。したがって、tetrad 形式の曲率テンソルは上の CD に関して反対称化を行えばよく

$$\begin{aligned}R_{ABCD} &= -\gamma_{ABC,D} - \eta^{EF} (\gamma_{EAC} \gamma_{FBD} + \gamma_{BAE} \gamma_{FCD}) + \gamma_{ABD,C} \\ &\quad + \eta^{EF} (\gamma_{EAD} \gamma_{FBC} + \gamma_{BAE} \gamma_{FDC})\end{aligned}\quad (2.68)$$

となる。tetrad 形式では曲率テンソルは Ricci 回転係数を用いてかけている。Ricci 回転係数 γ_{ABC} は AB に関して反対称なので全部で 24 個の独立成分がある。共変微分の交換関係で定義されている曲率テンソルは交換関係が満たす Jacobi 恒等式と等価である Bianchi 恒等式

$$R_{\mu\nu[\lambda\rho;\sigma]} = 0 \quad (2.69)$$

を満たす。ここで、 $[\]$ で挟まれた添え字は完全反対称化していることを示している。つまり、 n 個の添字 A_1, \dots, A_n を持つテンソル T_{A_1, \dots, A_n} を考えていたら

$$T_{[A_1, \dots, A_n]} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) T_{A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}} \quad (2.70)$$

という定義である。もちろん tetrad 形式の曲率テンソルも Bianchi 恒等式を満たす:

$$R_{AB[CD;E]} := R_{\mu\nu[\lambda\rho;\sigma]}(e_A)^\mu(e_B)^\nu(e_C)^\lambda(e_D)^\rho(e_E)^\sigma = 0. \quad (2.71)$$

ここで tetrad のラベルでのセミコロンは

$$V_{A;B} := V_{\mu;\nu}(e_A)^\mu(e_B)^\nu \quad (2.72)$$

と定義した。tetrad のラベルでのコロンとセミコロンではスピン接続、または Ricci 回転係数だけ異なることに注意する。 $R_{ABCD;E}$ は成分表示すると

$$\begin{aligned} R_{ABCD;E} &= R_{\mu\nu\lambda\rho;\sigma}(e_A)^\mu(e_B)^\nu(e_C)^\lambda(e_D)^\rho(e_E)^\sigma \\ &= [R_{\mu\nu\lambda\rho}(e_A)^\mu(e_B)^\nu(e_C)^\lambda(e_D)^\rho]_{;\sigma}(e_E)^\sigma - R_{\mu\nu\lambda\rho}(e_A)^\mu{}_{;\sigma}(e_B)^\nu(e_C)^\lambda(e_D)^\rho(e_E)^\sigma \\ &\quad \cdots - R_{\mu\nu\rho\sigma}(e_A)^\mu(e_B)^\nu(e_C)^\lambda(e_D)^\rho{}_{;\sigma}(e_E)^\sigma \\ &= R_{ABCD,\sigma}(e_E)^\sigma - \eta^{MN}(\gamma_{MAE}R_{NB CD} + \gamma_{MBE}R_{AN CD} \\ &\quad + \gamma_{MCE}R_{AB ND} + \gamma_{MDE}R_{ABC N}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

である。以降、Bianchi 恒等式を成分を指定したい時は $R_{AB[CD,E]} = 0$ の成分に関する式を (ABCDE) 成分と呼ぶことにする。

■Newman-Penrose 形式 上の tetrad をヌル tetrad に選ぶ。つまり、上の tetrad 形式の $(e_A)^\mu$ を

$$\{(e_0)^\mu, (e_1)^\mu, (e_2)^\mu, (e_3)^\mu\} = \{l^\mu, n^\mu, m^\mu, m^{*\mu}\} \quad (2.74)$$

とする。この時 η_{AB} は

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

と成分表示される。Kerr 時空の曲率を扱う上で Ricci 回転係数が基本的であることがわかったので、24 個ある実独立成分ある γ_{ABC} と同じ自由度を持つ 12 個の複素スカラー量を

$$\alpha := \frac{1}{2}(\gamma_{103} + \gamma_{233}) = \frac{1}{2}(n^\mu l_{\mu;\nu} m^{*\nu} - m^{*\mu} m_{\mu;\nu} m^{*\nu}), \quad (2.76)$$

$$\beta := \frac{1}{2}(\gamma_{102} + \gamma_{232}) = \frac{1}{2}(n^\mu l_{\mu;\nu} m^\nu - m^{*\mu} m_{\mu;\nu} m^\nu), \quad (2.77)$$

$$\gamma := \frac{1}{2}(\gamma_{101} + \gamma_{231}) = \frac{1}{2}(n^\mu l_{\mu;\nu} n^\nu - m^{*\mu} m_{\mu;\nu} n^\nu), \quad (2.78)$$

$$\varepsilon := \frac{1}{2}(\gamma_{100} + \gamma_{230}) = \frac{1}{2}(n^\mu l_{\mu;\nu} l^\nu - m^{*\mu} m_{\mu;\nu} l^\nu), \quad (2.79)$$

$$\kappa := \gamma_{200} = m^\mu l_{\mu;\nu} l^\nu, \quad (2.80)$$

$$\pi := \gamma_{130} = -m^{*\mu} n_{\mu;\nu} l^\nu, \quad (2.81)$$

$$\rho := \gamma_{203} = m^\mu l_{\mu;\nu} m^{*\nu}, \quad (2.82)$$

$$\lambda := \gamma_{133} = -m^{*\mu} n_{\mu;\nu} m^{*\nu}, \quad (2.83)$$

$$\sigma := \gamma_{202} = m^\mu l_{\mu;\nu} m^\nu, \quad (2.84)$$

$$\mu := \gamma_{132} = -m^{*\mu} n_{\mu;\nu} m^\nu, \quad (2.85)$$

$$\nu := \gamma_{131} = -m^{*\mu} n_{\mu;\nu} n^\nu, \quad (2.86)$$

$$\tau := \gamma_{201} = m^\mu l_{\mu;\nu} n^\nu \quad (2.87)$$

のように定義する。これらをスピン係数と呼ぶ。ここでスピン係数は複素量なので、 $\kappa^* = \gamma_{200}^* = \gamma_{300}$ のように複素共役も含めると Ricci 回転係数と一対一対応することに注意しよう。曲率テンソルは物質分布から Einstein 方程式を解くと決まる Ricci テンソル部分と真空でも有限の値を持ち得る重力波の自由度を記述する Weyl テンソル $W_{\alpha\mu\beta\nu}$ に

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = g_{\alpha[\beta} R_{\nu]\mu} + g_{\mu[\nu} R_{\beta]\alpha} - \frac{1}{3} g_{\alpha[\beta} R_{\nu]\mu} R + C_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.88)$$

と分解できていた。つまり、Einstein 方程式から決まる 10 成分を記述する Ricci テンソルと 10 成分の Weyl テンソルに分けていた。ここで、Ricci テンソルと Weyl テンソルをヌル tetrad に射影した量を以下のように定義する。まず、Ricci テンソルに関して

$$\Phi_{00} := -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} l^\mu l^\nu, \quad (2.89)$$

$$\Phi_{11} := -\frac{1}{4} (R_{\mu\nu} l^\mu n^\nu + R_{\mu\nu} m^\mu m^{*\nu}), \quad (2.90)$$

$$\Phi_{22} := -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \quad (2.91)$$

$$\Phi_{01} := -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \quad (2.92)$$

$$\Phi_{02} := -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} m^\mu m^\nu, \quad (2.93)$$

$$\Phi_{12} := -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} n^\mu m^\nu \quad (2.94)$$

と定義する。 Φ_{ii} ($i = 0, 1, 2$) は実スカラー量であり、 $\Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{12}$ は複素スカラー量である。これらと Ricci スカラー R の計 7 つのスカラーが Ricci テンソルの実独立 10 成分に対応する。

次に、Weyl テンソルに対して

$$\Psi_0 := -W_{\mu\nu\lambda\rho}l^\mu m^\nu l^\lambda m^\rho, \quad (2.95)$$

$$\Psi_1 := -W_{\mu\nu\lambda\rho}l^\mu n^\nu l^\lambda m^\rho, \quad (2.96)$$

$$\Psi_2 := -\frac{1}{2}W_{\mu\nu\lambda\rho}(l^\mu n^\nu l^\lambda n^\rho - l^\mu n^\nu m^\lambda m^{*\rho}), \quad (2.97)$$

$$\Psi_3 := -W_{\mu\nu\lambda\rho}l^\mu n^\nu m^{*\lambda} n^\rho, \quad (2.98)$$

$$\Psi_4 := -W_{\mu\nu\lambda\rho}n^\mu m^{*\nu} n^\lambda m^{*\rho} \quad (2.99)$$

と 5 つの複素スカラー量を定義する。ここで導入したスピン係数, Φ_{ab}, Ψ_a を総称して Newman-Penrose 量 (NP 量) と呼ぶ。Kerr 時空に対しての NP 量を示す。Kerr 時空解は真空解であるからリッチテンソルと関係している Φ_{ab} は零となる。スピン接続を tetrad に射影したものであるスピン係数は

$$\rho = \frac{1}{r - ia \sin \theta}, \quad \tau = \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma}, \quad \mu = \frac{\Delta}{2\Sigma(r - ia \cos \theta)} = \frac{\rho\Delta}{2\Sigma}, \quad (2.100)$$

$$\pi = \frac{-ia \sin \theta}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)^2} = -\frac{ia\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{2}}, \quad \beta = -\frac{\cos \theta}{2\sqrt{2} \sin \theta (r + ia \cos \theta)} = -\frac{\rho^* \cot \theta}{2\sqrt{2}}, \quad (2.101)$$

$$\alpha = \frac{r \cos \theta - ia(1 + \sin^2 \theta)}{2\sqrt{2} \sin \theta (r - ia \cos \theta)^2} = \pi - \beta^*, \quad \gamma = \frac{a^2 - Mr + i(r - M)a \cos \theta}{2\Sigma(r - ia \cos \theta)} = \mu - \frac{r - M}{2\Sigma}, \quad (2.102)$$

$$\varepsilon = \kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0 \quad (2.103)$$

となる。上の式で出てくる π はスピン係数であり円周率の π ではないことに注意しよう。そして Weyl テンソルに対応する NP スカラーは

$$\Psi_2 = \frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3} = M\rho^3, \quad \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0 \quad (2.104)$$

となる。

Ψ_0, Ψ_4 は無限遠に到達する重力波に対応していることを見よう。Kerr 時空からの重力波による摂動を考えよう。具体的には Kerr ブラックホール中心付近で起きた計量の揺らぎが無限遠に球面波として伝わる状況を考える。Kerr 時空は $r \rightarrow \infty$ で平坦時空なのでうまくゲージを固定すれば $r \rightarrow \infty$ で

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.105)$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} -dt^2 + dr^2 + (1 + h_+)r^2 d\theta^2 + 2h_\times r^2 \sin \theta d\theta d\varphi + (1 - h_+)r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.106)$$

と計量をおける。ここで h_+, h_\times は重力波のプラスモードとクロスモードで、摂動計量 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(b)}$ をゲージ固定した後の 4 次元時空上での物理的な重力波の自由度であ

る。今、背景計量 $g_{\mu\nu}^{(b)}$ は Kerr 時空である。 $r \rightarrow \infty$ を考えるとヌル tetrad は r の主要項で

$$l^\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (1, 1, 0, 0), \quad (2.107)$$

$$n^\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0), \quad (2.108)$$

$$m^\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}r}(0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta}) \quad (2.109)$$

となる。これら無限遠での tetrad の表示を Ψ_0, Ψ_4 に代入すれば、無限遠では物質がないので曲率テンソルと Weyl テンソルは等しく

$$\begin{aligned} \Psi_0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & -\frac{1}{2r^2} \left[R_{t\theta t\theta} + 2R_{t\theta r\theta} + R_{r\theta r\theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} (R_{t\varphi t\varphi} + 2R_{t\varphi r\varphi} + R_{r\varphi r\varphi}) \right. \\ & \left. + \frac{2i}{\sin^2 \theta} (R_{t\theta t\varphi} + R_{t\theta r\varphi} + R_{t\varphi r\theta} + R_{r\theta r\varphi}) \right], \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \Psi_4 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & -\frac{1}{8r^2} \left[R_{t\theta t\theta} - 2R_{t\theta r\theta} + R_{r\theta r\theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} (R_{t\varphi t\varphi} - 2R_{t\varphi r\varphi} + R_{r\varphi r\varphi}) \right. \\ & \left. + \frac{2i}{\sin^2 \theta} (-R_{t\theta t\varphi} + R_{t\theta r\varphi} + R_{t\varphi r\theta} - R_{r\theta r\varphi}) \right] \end{aligned} \quad (2.111)$$

となる。摂動計量 $h_{\mu\nu}$ の一次に関して曲率テンソルは

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = R_{(b)\mu\beta\nu}^\alpha + \nabla_\beta^{(b)} \Gamma_{(1)\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu^{(b)} \Gamma_{(1)\mu\beta}^\alpha + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.112)$$

と計算できる。ここで、 $\nabla_\mu^{(b)}$ は背景時空に関する共変微分であり

$$\Gamma_{(1)\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_{(b)} \left(\nabla_\beta^{(b)} h_{\nu\alpha} + \nabla_\alpha^{(b)} h_{\nu\beta} - \nabla_\nu^{(b)} h_{\alpha\beta} \right) \quad (2.113)$$

である。今回、背景時空は Kerr 時空であり $R_{(b)\mu\beta\nu}^\alpha = 0$ 、無限遠で $h_{\mu\nu}$ の一次まで見ると計算上では $\nabla_\mu^{(b)} \rightarrow \partial_\mu$ とすればよい。重力波のプラスモード h_+ とクロスモード h_\times は

$$h_+ = \frac{h_{\theta\theta}}{r^2}, \quad h_\times = \frac{h_{\theta\varphi}}{r^2 \sin \theta} \quad (2.114)$$

のように計量摂動 $h_{\theta\theta}, h_{\theta\varphi}$ と結びついていたから、

$$\Psi_0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\partial_t + \partial_r)^2 (h_+ + ih_\times), \quad (2.115)$$

$$\Psi_4 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\partial_t - \partial_r)^2 (h_+ - ih_\times) \quad (2.116)$$

と Ψ_0, Ψ_4 は重力波のプラス・クロスモードと関係付いた。この関係式から Ψ_0 は動径方向内向き進行波、 Ψ_4 は動径方向外向き進行波であることがわかる。重力波観測で問題となるのは外向き進行波であるから Ψ_4 に注目する。

それでは、重力波のスピンを求めよう。そのために、局所ローレンツ系のローレンツ変換を考えたい。ここで、ヌル tetrad は以下の3つの変換でヌル条件と直交条件を変えない。1つ目の変換は任意の複素数 a に関して

$$l^\mu \rightarrow l^\mu, \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + al^\mu, \quad n^\mu \rightarrow n^\mu + a^*m^\mu + am^{*\mu} + |a|^2 l^\mu \quad (2.117)$$

であり、2つ目の変換は任意の複素数 b に関して

$$n^\mu \rightarrow n^\mu, m^\mu \rightarrow m^\mu + bn^\mu, l^\mu \rightarrow l^\mu + b^*m^\mu + bm^{*\mu} + |b|^2n^\mu \quad (2.118)$$

であり、3つ目の変換は前に言及したように任意の実数 Λ, θ に関して

$$l^\mu \rightarrow \Lambda l^\mu, n^\mu \rightarrow \frac{1}{\Lambda}n^\mu, m^\mu \rightarrow e^{i\theta}m^\mu \quad (2.119)$$

というものである。これのパラメタ a, b, Λ, θ は4次元局所ローレンツ変換の6実自由度に対応している。特に θ は l^μ, m^μ で指定される零質量の粒子が伝播する方向を軸として θ だけ回転している。この3つ目の変換に対して Weyl テンソルの NP スカラーは

$$\Psi_0 \rightarrow e^{2i\theta}\Psi_0, \Psi_1 \rightarrow e^{i\theta}\Psi_1, \Psi_2 \rightarrow \Psi_2, \Psi_3 \rightarrow e^{-i\theta}\Psi_3, \Psi_4 \rightarrow e^{-2i\theta}\Psi_4 \quad (2.120)$$

と変換する。ここから $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ はそれぞれヘリシティ $2, 1, 0, -1, -2$ を持つことがわかる。

それでは、Kerr 時空からの摂動論を行い重力波を記述する Teukolsky 方程式を導く準備をする。ヌル tetrad での微分演算子を定義する:

$$\hat{D} := l^\mu \partial_\mu = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \partial_t + \partial_r + \frac{a}{\Delta} \partial_\varphi, \quad (2.121)$$

$$\hat{\Delta} := n^\mu \partial_\mu = \frac{r^2 + a^2}{2\Sigma} \partial_t - \frac{\Delta}{2\Sigma} \partial_r + \frac{a}{2\Sigma} \partial_\varphi, \quad (2.122)$$

$$\hat{\delta} := m^\mu \partial_\mu = \frac{ia\rho^* \sin\theta}{\sqrt{2}} \partial_t + \frac{\rho^*}{\sqrt{2}} \partial_\theta + \frac{i\rho^*}{\sqrt{2} \sin\theta} \partial_\varphi, \quad (2.123)$$

$$\hat{\delta}^* := m^{*\mu} \partial_\mu = -\frac{ia\rho \sin\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \partial_\theta - \frac{i\rho}{\sqrt{2} \sin\theta} \partial_\varphi. \quad (2.124)$$

ここで、 ρ は Kerr 時空のスピン係数で、微分演算子にはハットをつけることで $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\hat{\Delta}$ は区別する。tetrad 形式の曲率テンソル R_{1313} は Ψ_4 の定義から

$$R_{1313} = -\Psi_4 \quad (2.125)$$

であった。一方、Ricci 回転係数で

$$R_{1313} = -\gamma_{131,3} + \gamma_{133,1} - \eta^{EF}(\gamma_{E11}\gamma_{F33} + \gamma_{31E}\gamma_{F13} - \gamma_{E13}\gamma_{F31} - \gamma_{31E}\gamma_{F31}) \quad (2.126)$$

とかけた。 $\gamma_{131,3} = \hat{\delta}^*\nu$ のように NP 量で書き直すと

$$-\Psi_4 = R_{1313} = (\hat{\Delta} - 3\gamma + \gamma^* - \mu - \mu^*)\lambda - (\hat{\delta}^* - 3\alpha - \beta^* + \tau^* - \pi)\nu \quad (2.127)$$

と NP 量同士の関係式を得る。他の NP 量についても曲率テンソル R_{ABCD} の定義式から同様の計算ができる。また、Bianchi 恒等式の (13130) 成分を NP 量で書き直すと

$$\begin{aligned} 0 = -3R_{13[13,0]} &= (\hat{D} + \rho - 4\epsilon)\Psi_4 - (\hat{\delta}^* - 2\alpha - 4\pi)\Psi_3 - 3\lambda\Psi_2 \\ &+ (\hat{\Delta} - 2\gamma + 2\gamma^* - \mu^*)\Phi_{02}^* - (\hat{\delta}^* - 2\alpha + 2\tau^*)\Phi_{12}^* + 2\nu\Phi_{01}^* - 2\lambda\Phi_{11} + \sigma^*\Phi_{22} = 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

であり、(13132) 成分を書き直すと

$$0 = -3R_{13[13,2]} = (\hat{\delta} - 4\beta + \tau)\Psi_4 - (\hat{\Delta} - 2\gamma - 4\mu)\Psi_3 - 3\nu\Psi_2 + (\hat{\Delta} - 2\gamma - 2\mu^*)\Phi_{12}^* - (\hat{\delta}^* - 2\alpha - 2\beta^* + \tau^*)\Phi_{22} + 2\nu\Phi_{11} - 2\lambda\Phi_{12} + \nu^*\Phi_{02}^* = 0 \quad (2.129)$$

となる。ここまでは、純粋に Kerr 時空の幾何学の議論である。ここで Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (2.130)$$

を用いると Ricci テンソルの NP 量はエネルギー運動量テンソルを用いて

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= -4\pi T_{00}, \quad \Phi_{11} = -2\pi(T_{01} + T_{23}), \quad \Phi_{22} = -4\pi T_{11}, \\ \Phi_{01} &= -4\pi T_{02}, \quad \Phi_{02} = -4\pi T_{22}, \quad \Phi_{12} = -4\pi T_{12} \end{aligned} \quad (2.131)$$

と結びつく。ここで、NP 量の添え字は慣習でついているもので本修士論文で導入したヌル tetrad の番号とは関係のないことに注意しよう。一方、エネルギー運動量テンソルの方の添字は Ricci 回転係数と同様に tetrad の添字である (ex. $T_{00} = T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu$)。また、Kerr 時空の場合は $T_{\mu\nu} = 0$ であるがこれから Kerr 時空に摂動を加えると上の Bianchi 恒等式の Φ_{ab} がソース項となり波動方程式が出てくる。

■ **Teukolsky 形式** これまで計量と曲率テンソルを用いた時空の記述 (Bianchi 恒等式) と Einstein 方程式をヌル tetrad を用いて定義された NP 量で書き直した。Kerr 時空の場合 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と計量を摂動展開して Einstein 方程式を摂動の一次まで書き直すよりも、NP 量を用いた方見通しが良くなる。つまり、計量の摂動ではなく曲率テンソルの摂動を扱う。これを Teukolsky 形式という。

ヌル tetrad, ヌル tetrad での微分演算子、スピン係数、曲率テンソルの NP 量に関して

$$l^\mu = l_{(b)}^\mu + l_{(1)}^\mu + \dots, \quad (2.132)$$

$$\hat{D} = \hat{D}_{(b)} + \hat{D}_{(1)} + \dots, \quad (2.133)$$

$$\alpha = \alpha_{(b)} + \alpha_{(1)} + \dots, \quad (2.134)$$

$$\Psi_a = \Psi_a^{(b)} + \Psi_a^{(1)} + \dots \quad (2.135)$$

と (b) でラベルされた背景時空の寄与と (1) でラベルされた 1 次摂動の部分に分ける。したがって、上で記載した Ψ_4 の定義式と Bianchi 恒等式の (13130) 成分と (13132) 成分を 1 次の摂動と背景に分けると定義式は

$$\begin{aligned} &(\hat{\Delta}^{(b)} - 3\gamma^{(b)} + \gamma^{*(b)} - \mu^{(b)} - \mu^{*(b)})\lambda^{(1)} \\ &\quad - (\hat{\delta}^{*(b)} - 3\alpha^{(b)} - \beta^{*(b)} + \tau^{*(b)} - \pi^{(b)})\nu^{(1)} + \Psi_4^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.136)$$

と括弧で括られた項は Kerr 時空の量でその他は 1 次摂動項であり、(13130) 成分はソースに

なる Φ_{ab} を右辺にまとめれば

$$\begin{aligned} & (\hat{D}^{(b)} + \rho^{(b)} - 4\varepsilon^{(b)})\Psi_4^{(1)} - (\hat{\delta}^{*(b)} - 2\alpha^{(b)} - 4\pi^{(b)})\Psi_3^{(1)} - 3\lambda^{(1)}\Psi_2^{(b)} \\ & = -(\hat{\Delta}^{(b)} - 2\gamma^{(b)} + 2\gamma^{*(b)} - \mu^{*(b)})\Phi_{02}^{*(1)} + (\hat{\delta}^{*(b)} - 2\alpha^{(b)} + 2\tau^{*(b)})\Phi_{12}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.137)$$

であり、(13132) 成分は

$$\begin{aligned} & (\hat{\delta}^{(b)} - 4\beta^{(b)} + \tau^{(b)})\Psi_4^{(1)} - (\hat{\Delta}^{(b)} - 2\gamma^{(b)} - 4\mu^{(b)})\Psi_3^{(1)} - 3\nu^{(1)}\Psi_2^{(b)} \\ & = -(\hat{\Delta}^{(b)} - 2\gamma^{(b)} - 2\mu^{*(b)})\Phi_{12}^{*(1)} + (\hat{\delta}^{*(b)} - 2\alpha^{(b)} - 2\beta^{*(b)} + \tau^{*(b)})\Phi_{22}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.138)$$

となる。今、重力波の自由度である $\Psi_4^{(1)}$ に関する 2 階偏微分波動方程式を導出したい。まず (2.137) と (2.138) の左辺で未知変数 $\Psi_3^{(1)}$ を消去しよう。唐突だが $(\hat{\Delta}^{(b)} - 3\gamma^{(b)} + \gamma^{*(b)} - 4\mu^{(b)} - \mu^{*(b)}) \times (2.137)$ から $(\hat{\delta}^* - 3\alpha^{(b)} - \beta^{*(b)} + \tau^{*(b)} - 4\pi^{(b)}) \times (2.138)$ を引くと

$$\begin{aligned} & \left[\hat{\Delta}^{(b)} - 3\gamma^{(b)} + \gamma^{*(b)} - 4\mu^{(b)} - \mu^{*(b)} \right] \left(\hat{\delta}^{*(b)} - 2\alpha^{(b)} - 4\pi^{(b)} \right) \\ & = \left[\hat{\delta}^{*(b)} - 3\alpha^{(b)} - \beta^{*(b)} + \tau^{*(b)} - 4\pi^{(b)} \right] \left(\hat{\Delta}^{(b)} - 2\gamma^{(b)} - 4\mu^{(b)} \right) \end{aligned} \quad (2.139)$$

という微分作用素に関する交換関係が使え $\Psi_3^{(1)}$ が消える。また、 $\Psi_2^{(b)}$ は

$$\begin{aligned} & 3 \left(\hat{\Delta}^{(b)} - 3\gamma^{(b)} + \gamma^{*(b)} - 4\mu^{(b)} - \mu^{*(b)} \right) \lambda^{(1)} \Psi_2^{(b)} \\ & \quad - 3 \left(\hat{\delta}^* - 3\alpha^{(b)} - \beta^{*(b)} + \tau^{*(b)} - 4\pi^{(b)} \right) \nu^{(1)} \Psi_2^{(b)} \\ & = 3 \left((\hat{\Delta}^{(b)} - 3\gamma^{(b)} + \gamma^{*(b)} - \mu^{(b)} - \mu^{*(b)}) \lambda^{(1)} \right. \\ & \quad \left. - (\hat{\delta}^{*(b)} - 3\alpha^{(b)} - \beta^{*(b)} + \tau^{*(b)} - \pi^{(b)}) \nu^{(1)} \right) \Psi_2^{(b)} \\ & \quad + 3\lambda^{(1)} (\hat{\Delta}^{(b)} - 3\mu^{(b)}) \Psi_2^{(b)} - 3\nu^{(1)} (\hat{\delta}^* - 3\pi^{(b)}) \Psi_2^{(b)} \\ & = -3\Psi_4^{(1)} \Psi_2^{(b)} \end{aligned} \quad (2.140)$$

と簡単な表式になる。ここで 2 行目で積の微分を用い、最後の等号で初項には Ψ_4 の定義式 (2.136) を代入し第 2 項と第 3 項は

$$(\hat{\Delta}^{(b)} - 3\mu^{(b)})\Psi_2^{(b)} = \left(-\frac{\Delta}{2\Sigma} \partial_r - \frac{3\Delta}{2\Sigma(r - ia \cos \theta)} \right) \Psi_2^{(b)} = 0, \quad (2.141)$$

$$(\hat{\delta}^* - 3\pi^{(b)})\Psi_2^{(b)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \partial_\theta + \frac{3ia \sin \theta}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)^2} \right) \Psi_2^{(b)} = 0 \quad (2.142)$$

のように具体的な計算で消えることがわかる。ここで、Boyer-Lindquist 座標で表した背景 Kerr 時空での NP スカラー $\Psi_2^{(b)}$ が

$$\Psi_2^{(b)} = \frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3} \quad (2.143)$$

とかけることを用いた。したがって、 $\Psi_4^{(1)}$ に関する波動方程式が

$$\begin{aligned} & \left[(\hat{\Delta}^{(b)} - 3\gamma^{(b)} + \gamma^{*(b)} - 4\mu^{(b)} - \mu^{*(b)})(\hat{D}^{(b)} + \rho^{(b)} - 4\epsilon^{(b)}) \right. \\ & \left. - (\hat{\delta}^* - 3\alpha^{(b)} - \beta^{*(b)} + \tau^{*(b)} - 4\pi^{(b)})(\hat{\delta}^{(b)} - 4\beta^{(b)} + \tau^{(b)}) + 3\Psi_2^{(b)} \right] \Psi_4^{(1)} = -4\pi T_4 \end{aligned} \quad (2.144)$$

のように得られる。ここで、右辺の π はスピン係数ではなく円周率である。 T_4 は Ricci テンソルの NP 量からの寄与を Einstein 方程式を用いてエネルギー運動量テンソルで書いたもので

$$\begin{aligned} T_4 & := (\hat{\Delta}^{(b)} - 3\gamma^{(b)} + \gamma^{*(b)} - 4\mu^{(b)} - \mu^{*(b)}) \\ & \quad \times \left[(\hat{\delta}^{*(b)} - 2\alpha^{(b)} + 2\tau^{*(b)})T_{13}^{(1)} - (\hat{\Delta}^{(b)} - 2\gamma^{(b)} + 2\gamma^{*(b)} - \mu^{*(b)})T_{33}^{(1)} \right] \\ & \quad - (\hat{\delta}^{*(b)} - 3\alpha^{(b)} - \beta^{*(b)} + \tau^*) \\ & \quad \times \left[(\hat{\delta}^{*(b)} - 2\alpha^{(b)} - 2\beta^{*(b)} + \tau^{*(b)})T_{11}^{(1)} - (\hat{\Delta}^{(b)} - 2\gamma^{(b)} - 2\mu^{*(b)})T_{13}^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (2.145)$$

である。同様に内向きに進む重力波 $\Psi_0^{(1)}$ に関しても波動方程式を導出できる。ここで、

$$\psi_{-2} := \rho^{-4}\Psi_4^{(1)}, \quad (2.146)$$

$$\psi_2 := \Psi_0^{(1)} \quad (2.147)$$

のように ψ_s を導入すると統一的に波動方程式を記述できる:

$$\mathcal{O}_s \psi_s = 4\pi \Sigma \hat{T}_s. \quad (2.148)$$

これが Teukolsky 方程式である。ここで、 π は円周率で $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ であった。また、ソースは $s = -2$ については $\hat{T}_{-2} := 2\rho^{-4}T_4$ である。微分演算子 \mathcal{O}_s は

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_s & := - \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \partial_t^2 - \frac{4Mar}{\Delta} \partial_t \partial_\varphi + \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right] \partial_\varphi^2 + \Delta^{-s} \partial_r (\Delta^{s+1} \partial_r) \\ & \quad + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \partial_\varphi \\ & \quad + 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \partial_t + s - s^2 \cot^2 \theta \end{aligned} \quad (2.149)$$

である。この微分演算子の係数は t, φ に依存しない。これは、Kerr 時空が定常で z 軸回転不変な時空であることに由来する。したがって、上の解は $e^{-i\omega t} e^{im\varphi}$ ($m \in \mathbb{Z}$) で展開でき

$$\psi_s = R(r)S(\theta)e^{-i\omega t}e^{im\varphi} \quad (2.150)$$

とおけるだろう。ここで、 r, θ に関しても変数分離できる解の形を仮定した。この解の形を

Teukolsky 方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \left[\frac{1}{\Delta} (\omega^2 (r^2 + a^2)^2 - 4Marm\omega + a^2\omega^2 + 2imsa(r - M) - 2is\omega M(r^2 - a^2)) \right. \\ \left. + 2is\omega r + \Delta^{-s} \partial_r (\Delta^{s+1} \partial_r) \right] R(r) \\ + \frac{1}{S(\theta)} \left[-a^2\omega^2 \sin^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) - \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right. \\ \left. - 2sa\omega \cos \theta + s - s^2 \cot \theta \right] S(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (2.151)$$

となる。変数分離の定数を λ とおけば

$$\left[\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{d}{dr} \right) + \frac{K^2 - 2is(r - M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right] R(r) = 0 \quad (2.152)$$

と摂動源なし ($\hat{T}_s = 0$) の動径 Teukolsky 方程式を得る。ここで $K := (r^2 + a^2)\omega - ma$ と定めた。一方、極角の関数 $S(\theta)$ については

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) - a^2\omega^2 \sin^2 \theta - \frac{(m + s \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} - 2as\omega \cos \theta + s + 2am\omega + \lambda \right] S(\theta) = 0 \quad (2.153)$$

となる。 $\theta = 0, \pi$ で発散しないことを要請すると λ は離散ラベルではれる。 $a \rightarrow 0$ の Schwarzschild 極限を取ったときスピン重みつき球面調和関数が解となる。したがって $\lambda \xrightarrow{a\omega \rightarrow 0} l(l+1) - s(s+1)$ となるような λ に λ_l とつけることが多い。

第3章

on-shell 散乱振幅と BCFW recursion 公式

3.1 spinor-helicity formalism

4次元平坦時空上の場の量子論を考える際に、Kinematics がわかりやすくなる表示を導入する。つまり、この節のタイトルで通称呼ばれる Spinor-helicity formalism を導入する。零質量の場合は [14] が有質量に拡張する議論は [15] が詳しい。それでは、まず初めに spinor を導入しよう。

3.1.1 Dirac 方程式

では、質量 m を持つ自由な Dirac 場 Ψ の理論を考えよう。ラグランジアン \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (3.1)$$

であった。このラグランジアンから Dirac 場は運動方程式として

$$(-i\not{\partial} + m)\Psi(x) = 0 \quad (3.2)$$

のような Dirac 方程式を満たす。ここで、 $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ はファインマンスラッシュ記法であり、ガンマ行列はカイラル表示 (or ワイル表示) で

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

である。ここで4元の Pauli 行列 $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$ は $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$ ($i = 1, 2, 3$) であり、Pauli 行列は

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

と定義されている。また、Dirac 共役 $\bar{\Psi}$ は

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \beta, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{a} \dot{b}} \\ \delta_a^{\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

である。両辺に $i\not{\partial} + m$ を作用させれば $(-\partial^2 + m^2)\Psi(x) = 0$ と Dirac 場は Klein-Gordon 方程式 (KG 方程式) を満たす。平坦時空には時間と空間それぞれに並進対称性があるので KG 方程式をフーリエ変換し運動量表示で見た方が解きやすい。つまり、KG 方程式のモード解である on-shell の 4 元運動量 ($p^2 + m^2 = 0$) を用いた平面波 $e^{\pm ipx}$ を用いて Dirac 場は

$$\Psi(x) = \int d\Phi(p) (b(p)u(p) e^{ipx} + d^*(p)v(p) e^{-ipx}) \quad (3.6)$$

と展開される必要がある。次に Dirac 方程式の解となるように 4 元 Dirac 場の運動量基底 $u(p), v(p)$ を求めよう。それら $u(p), v(p)$ は

$$(\not{p} + m)u(p) = 0, \quad (-\not{p} + m)v(p) = 0 \quad (3.7)$$

の解である。カイラル表示のガンマ行列を見ればこれらはそれぞれ 2 つずつ線型独立な解を持っている。それらを $s = \pm$ でラベルすると Dirac 場 $\Psi(x)$ は

$$\Psi(x) = \int d\Phi(p) \sum_{s=\pm} (b_s(p)u_s(p) e^{ipx} + d_s^*(p)v_s(p) e^{-ipx}) \quad (3.8)$$

と平面波展開できる。ここで $b_s(p), d_s(p)$ は各運動量での複素 Grassmann 数の振幅である。ここから正準量子化する時は、振幅 $b_s(p), d_s(p)$ は演算子になり反交換関係 $\{b_s(p), b_{s'}^\dagger(p')\} = \delta_{ss'} 2|\mathbf{p}| \hat{\delta}^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ を満たすことを課す。ここで、 $\delta_{ss'}$ は Kronecker のデルタであり、 $b_s(p)$ は運動量 p の粒子の消滅演算子、 $d_s(p)$ は運動量 p の反粒子の消滅演算子となる。Massive ($m > 0$) の場合は $u_s(p)$ を静止系で σ^z の固有カイラルスピノルをとることで構成できる。そのため、ラベル $s = \pm$ は Dirac 粒子のスピンを記述していることがわかる。一方、零質量 ($m = 0$) の場合は $\not{p}u_s(p) = 0$ からスピンと運動量は平行になるので、その平行成分の正負 (ヘリシティ) を $s = \pm$ でラベルするような基底をとることができる。

3.1.2 Spinor-helicity の Notation の定義

前節でスピンとヘリシティを定義できたので、4 次元時空における spinor-helicity の本修論における notation を定める。文献によっては、三角ケットと四角ケットが異なる符号のヘリシティに対応していることがあるので注意が必要である。4 元運動量 p^μ は 4 元の Pauli 行列 $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$ ($i = 1, 2, 3$) を用いて 2 行 2 列の行列 $p_{a\dot{b}}$ でも書き表せる。

$$p_{a\dot{b}} = p_\mu (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} -p^0 - p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^0 + p^3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

ここで、 $a(\dot{b})$ は $SU(2)$ の添字で $1(\dot{1})$ から $2(\dot{2})$ を走る。

■零質量の場合 粒子と反粒子の入れ替え、ingoing と outgoing の入れ替え、ヘリシティの正負の入れ替えを同時に行っても理論が変わらない (交差対称性) を持つことから、上で定義した Dirac spinor の基底 $u_s(p)$, $v_s(p)$ は $u_{\pm}(p) = v_{\mp}(p)$ という関係を満たす。ここで、正のヘリシティを持つ outgoing な反粒子の spinor 基底を $|p\rangle_a$ と四角かっこで、負のヘリシティを持つ outgoing な反粒子の spinor 基底を $|p\rangle_{\dot{a}}$ と三角かっこで表す notation を本修論ではとる。つまり、

$$v_+(p) = u_-(p) = \begin{pmatrix} |p\rangle_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = u_+(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle_{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\bar{u}_-(p) = (0, \langle p|_{\dot{a}}), \quad \bar{u}_+(p) = (\langle p|^a, 0) \quad (3.11)$$

である。Dirac 方程式から

$$\not{p}v_s(p) = 0, \quad \bar{u}_s(p)\not{p} = 0, \quad \not{p} = \begin{pmatrix} 0 & p^{ab} \\ p^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

であるから、ここで定義した Weyl スピノルが

$$p^{\dot{a}b}|p\rangle_b = 0, \quad p_{ab}|p\rangle^{\dot{b}} = 0, \quad [p]^a p_{ab} = 0, \quad \langle p|_{\dot{a}} p^{\dot{a}b} = 0 \quad (3.13)$$

と Weyl 方程式を満たすことが確認できる。ここで、添え字の上げ下げは Levi-Civita 記号で行われる。

$$[p]^a = \epsilon^{ab}|p\rangle_b, \quad |p\rangle^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}b}\langle p|_{\dot{b}} \quad (3.14)$$

Levi-Civita 記号は $\epsilon^{12} = \epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1 = -\epsilon_{12} = -\epsilon_{\dot{1}\dot{2}}$ という慣習をとる。この慣習のもとで実際に $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} = \epsilon^{\dot{a}b}\epsilon^{ab}(\sigma^\mu)_{bb}$ となることが確認できる。

今、粒子の質量を m とすると $p^\mu p_\mu = -m^2 = 0$ で行列の形式では $\det\{p_{ab}\} = \det(p^{\dot{a}b}) = m^2 = 0$ となる。つまり行列のランクは 1 であることから、 $su(2)$ 代数の添字を持ったワイル spinor, $|p\rangle_a, |p\rangle^{\dot{a}}$ を用いて

$$p_{ab} = -|p\rangle_a \langle p|_b, \quad p^{\dot{a}b} = -|p\rangle^{\dot{a}} \langle p|_b \quad (3.15)$$

とかけることがわかる。ここでマイナス符号は、Dirac スピノル $u_s(p)$ がスピンの和に関して完全系をなす

$$u_-(p)\bar{u}_-(p) + u_+(p)\bar{u}_+(p) = -\not{p} \quad (3.16)$$

ことからくる。

では、null な運動量を $k^\mu = (\omega, \omega \sin \theta \cos \varphi, \omega \sin \theta \sin \varphi, \omega \cos \theta)$ と座標表示したときに具体的に spinor がどう書けるかを確認しよう。

$$k_{ab} = \omega \begin{pmatrix} -1 - \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \end{pmatrix} = 2\omega \begin{pmatrix} -\cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

であるから

$$|k]_a = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |k\rangle^{\dot{a}} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

と選べる。それでは、この spinor-helicity formalism を用いて散乱振幅を計算するときよく用いる性質を見ていこう。まず、三角と四角 spinor の足は異なる表現に属する添え字なので縮約をとることはできない ($\langle p|q\rangle = 0$)。では、同じ向きのヘリシティをもった spinor の足を縮約するとどうなるかみよう。ここで、内積のような notation を定義する。

$$\langle pq\rangle := \langle p|_{\dot{a}}|q\rangle^{\dot{a}}, \quad [pq] := [p^a|q]_a \quad (3.19)$$

添え字の上げ下げを Levi-Civita 記号を用いているので

$$\langle qp\rangle = \langle q|_{\dot{a}}|p\rangle^{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\langle p|_{\dot{c}}|q\rangle^{\dot{b}} = -\langle pq\rangle, \quad [pq] = -[qp] \quad (3.20)$$

となる。ここで、運動量 k^μ が実であることを用いると

$$\langle k|_{\dot{a}} = (|k]_a)^*, \quad [k]^a = (|k\rangle^{\dot{a}})^* \quad (k^\mu \text{が実数}) \quad (3.21)$$

となるので、実運動量 p^μ, q^μ とすると

$$[pq]^* = \langle qp\rangle \quad (3.22)$$

となる。また spinor-helicity formalism から Mandelstam 変数に直すときに

$$\langle pq\rangle[pq] = -\langle pq\rangle[qp] = -p_{ab}q^{\dot{b}a} = -p_\mu q_\nu \text{Tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = 2p \cdot q = (p+q)^2 \quad (3.23)$$

は便利である。ここで、最後から二番目の等式は Pauli 行列 σ^μ の反交換関係 $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ を、最後の等式は $p^2 = q^2 = 0$ と零質量であることを用いた。また、散乱振幅を計算するとき $\bar{u}_+(p)\gamma^\mu v_-(q)$ や $\bar{u}_-(p)\gamma^\mu v_+(q)$ のような項に遭遇する。

$$\bar{u}_+\gamma^\mu v_- = (0, \langle p|_{\dot{a}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |q\rangle_b \\ 0 \end{pmatrix} = \langle p|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}|q\rangle_b, \quad (3.24)$$

$$\bar{u}_-(p)\gamma^\mu v_+(q) = ([p]^a, 0) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ |q\rangle^{\dot{b}} \end{pmatrix} = [p]^a(\sigma^\mu)_{ab}|q\rangle^{\dot{b}} \quad (3.25)$$

と三角 spinor, 四角 spinor を用いてかける。これらをそれぞれ

$$\langle p|\gamma^\mu|q\rangle := \langle p|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}|q\rangle_b, \quad [p|\gamma^\mu|q\rangle := [p]^a(\sigma^\mu)_{ab}|q\rangle^{\dot{b}} \quad (3.26)$$

と書く。このような notation をとつても、三角 spinor と四角 spinor のとる表現の足は異なりガンマ行列のどちらのカイラル部分と縮約をとるのかわかるので問題ない。また、同じヘリシティでは縮約が取れないので $\langle 1|\gamma^\mu|2\rangle = [1|\gamma^\mu|2\rangle = 0$ と定める。ここで、運動量 p_1, p_2 に対応する三角、四角 spinor を $|1\rangle, |1], |2\rangle, |2]$ のように略記する notation を用いた。また、4元運動量の符号を変える時 $|k]_a, \langle k|_{\dot{a}}$ のどちらかにマイナス符号を配置するかは $|-k]_a = |k]_a, \langle -k|_{\dot{a}} = -\langle k|_{\dot{a}}$ の慣習を用いる。

これらの notation でよく用いる恒等式を記述しよう。

■Fierz 恒等式

$$\langle 1 | \gamma^\mu | 2 \rangle \langle 3 | \gamma_\mu | 4 \rangle = 2 \langle 1 3 \rangle \langle 2 4 \rangle \quad (3.27)$$

この恒等式はスピノルの縮約を入れ替えるときによく用いる。これは Pauli 行列 σ^μ が 2 行 2 列の行列の完全系をなすこと $(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma_\mu)_{b\dot{b}} = -2\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$, $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}(\bar{\sigma}_\mu)^{b\dot{b}} = -2\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ から成立する。

■Schouten 恒等式

$$\langle l i \rangle \langle j k \rangle + \langle l j \rangle \langle k i \rangle + \langle l k \rangle \langle i j \rangle = 0 \quad (3.28)$$

これは spinor が 2 成分であるので 3 つ異なる spinor をとってくると一つは他の二つの線形和でかけることから成立する。つまり、三角 spinor を $|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle$ ととってくると

$$|k\rangle = a|i\rangle + b|j\rangle \quad (3.29)$$

のようにある複素定数 a, b を用いてかける。それぞれ $\langle i |, \langle j |$ と内積を取り、任意の三角 spinor について $\langle i i \rangle = 0$ を用いれば $a = \langle j k \rangle / \langle j i \rangle, b = \langle i k \rangle / \langle i j \rangle$ と求まる。また、符号が異なるヘリシティを考えれば三角 spinor を四角 spinor にしたものが成立する。

■有質量の場合 有質量 $m > 0$ の時、 $\det(p_{a\dot{a}}) = m^2 > 0$ となり行列を spinor に分解することはできない。そこで、 $SL(2, \mathbb{C})$ の添え字 $I, J = 1, 2$ を spinor に新たに加えた $|p^I]_a, |p^I]_{\dot{a}}$ を導入する。添字 I に関して Levi-Civita 記号 ϵ^{IJ} を用いて添え字の上げ下げをする。これら $|p^I]_a, |p^I]_{\dot{a}}$ を導入すればランク 2 の行列も

$$p_{a\dot{a}} = |p^I]_a \langle p_I |_{\dot{a}} \quad (3.30)$$

と I で和をとることで分解できる。運動量を複素に拡張することを見越して $SL(2, \mathbb{C})$ の添字をつけたが、次節で説明するように実運動量のときは I が Little group の添字 $su(2) \cong so(3)$ となり運動量 p^μ を決めた時の $|p^I]_a, |p^I]_{\dot{a}}$ の選び方の冗長性に対応する。注意として、添字 I が $SL(2, \mathbb{C})$ であることは暗に $\det(|p^I]_a) = \det(|p^I]_{\dot{a}}) = m$ という慣習をとっている。ここで導入した有質量の spinor-helicity formalism を用いると

$$p_{a\dot{a}} |p^I]_{\dot{a}} = |p^J]_a \langle p_J |_{\dot{a}} |p^I]_{\dot{a}} = |p^J]_a \delta_J^I \det(|p^K]_{\dot{a}}) = m |p^I]_a, \quad (3.31)$$

$$p^{\dot{a}a} |p^I]_a = |p_J]_{\dot{a}} [p^J]^a |p^I]_a = |p_J]_{\dot{a}} \epsilon^{IJ} \det(|p^I]_a) = m |p^I]_{\dot{a}} \quad (3.32)$$

が成立する。これは Dirac 方程式 $(\not{p} - m)(|p^I]_a |p^I]_{\dot{a}})^T = 0$ に相当する。つまり、有質量 spinor-helicity は $p_{a\dot{a}}/m$ を用いて移り変わる。

3.2 散乱振幅

それでは、散乱振幅を定義しよう。考えている場の量子論モデルの S 行列を $S = 1 + iT$ と恒等演算子と遷移行列 T に分け時空に関する並進対称性からくる運動量保存則の部分を取り

除くと、それが散乱振幅である。つまり初期状態に i 個の粒子 $|k_1, \sigma_1; \dots; k_i, \sigma_i\rangle$ が終状態で f 個の粒子 $|k_1, \sigma_1; \dots; k_f, \sigma_f\rangle$ に遷移する確率から散乱振幅 A が

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^{(4)}\left(\sum_{a=1}^f k_a - \sum_{b=1}^i k_b\right) A(k_1, \sigma_1; k_2, \sigma_2; \dots, k_i, \sigma_i \rightarrow k_1, \sigma_1; \dots; k_f, \sigma_f) \\ := \langle k_1, \sigma_1; \dots; k_f, \sigma_f | T | k_1, \sigma_1; \dots; k_i, \sigma_i \rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

と定義される。ここで、 k_a は粒子の運動量で σ_a は粒子の内部自由度を記述する離散ラベルである。それでは、 S 行列のローレンツ対称性、理論のユニタリ性、散乱振幅の解析性、相互作用が局所であることを用いて on-shell 散乱振幅の kinematics が決定できることを説明する。ローレンツ対称性を満たしつつゲージ不変な相互作用を導入する際に基本構成要素となる 3 点散乱振幅を構成する。

3.2.1 散乱振幅のローレンツ対称性

■Little group 零質量の場合、 $P_{a\dot{a}}$ を分解する Weyl スピノルの選び方には不定性があった。実は、 $|p]^a, |p]_{\dot{a}}$ を $e^{i\theta}|p]^a, e^{-i\theta}|p]_{\dot{a}}$ と $\theta \in \mathbb{C}$ でスケール回転しても $p_{a\dot{a}}$ 自体は不変である。これは零質量粒子の little group に対応している。例えば、零質量粒子の運動量が $k^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$ のようにエネルギー ω で z 軸方向に運動している慣性系を取ると xy 平面上の回転に関して粒子の運動量は変わらない。実運動量であるという条件は、三角 spinor と四角 spinor の言葉では $|k]_{\dot{a}} = ([k]_a)^*$ となるから、上の θ は実数でなければならない。これはちょうど xy 平面回転の $U(1)$ 回転に対応する。一方、量子論では xy 平面の回転 ($U(1)$ 回転) に応じて状態の位相が回る。この little group による位相回転を利用して次節では on-shell 3 点振幅の kinematics を決定していく。

では次に、質量 $m > 0$ の有質量の場合を考えよう。有質量粒子の運動量が $p^\mu = m(1, \mathbf{0})$ と見える慣性系をとれば、Little group は xyz 空間回転の $SO(3)$ である。Lie 代数としては $so(3) \cong su(2)$ であるから、量子論において粒子の状態は $su(2)$ の有限次元ユニタリ既約表現として変換する。前に定義した spinor-helicity の $SL(2, \mathbb{C})$ の添字は実運動量条件で $su(2)$ になり little group と対応する。実際 $W^I{}_J \in SL(2, \mathbb{C})$ を用いて $W^I{}_J |p^J]_a, (W^{-1})^J{}_I |p_J]_{\dot{a}}$ と変換しても $p_{a\dot{a}} = W^I{}_K (W^{-1})^L{}_I |p^K]_a \langle p_L |_{\dot{a}} = \delta^L{}_K |p^K]_a \langle p_L |_{\dot{a}} = |p^K]_a \langle p_K |_{\dot{a}}$ と不変である。実運動量であるという条件は $|p^I]_a = (\langle p^I |_{\dot{a}})^*$ である。したがって $W^I{}_J |p^J]_a = (\epsilon^{IJ} (W^{-1})^K{}_J \langle p_K |_{\dot{a}})^*$ が成り立つという条件から $(W^{-1})^K{}_J = \epsilon_{IJ} (W^I{}_L)^* \epsilon^{LK} = (W_J{}^K)^*$ つまり $W \in SU(2)$ という条件がつく。

この有質量 spinor-helicity formalism はスピンの量子化軸を指定せずとも little group による変換が見やすいという利点がある。そこでスピン s 表現に属する有質量粒子の状態を spinor-helicity formalism を用いて記述したい。そこでスピン s 表現は $SU(2)$ の添え字を $2s$ 個持った完全対称テンソルを用いて記述できることに注目する。詳しくは球面調和関数を spinor-helicity formalism を用いて付録 A に記載した。

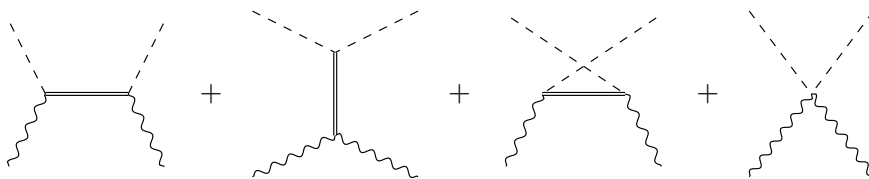
それでは、具体的に散乱振幅のローレンツ対称性を考えてみよう。 S 行列は Lorents 不変であるから、その状態と内積をとった散乱振幅は外線の粒子に対応したローレンツ群 $SO(1, 3)$ の表現としてローレンツ変換する。例えば、outgoing を運動量の正の向きにとる今までの notation でスピン $\frac{1}{2}$ の有質量粒子 1, スピン $\frac{1}{2}$ の有質量粒子 2, ヘリシティ $+\frac{3}{2}$ の零質量粒子 3, ヘリシティ -1 の零質量粒子 4 が関わる 4 点散乱振幅 $A^{\{I_1\}, \{J_1, J_2, J_3\}, \{+\frac{3}{2}\}, \{-1\}}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ を考えてみよう。ここで p_i は i 個目の粒子の運動量である。この散乱振幅はローレンツ変換 Λ によって

$$A^{\{I_1\}, \{J_1, J_2, J_3\}, \{+\frac{3}{2}\}, \{-1\}}(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow (W^{I_1}_{K_1})(W^{J_1}_{L_1} W^{J_2}_{L_2} W^{J_3}_{L_3}) e^{3i\theta} e^{-2i\theta} A^{\{I_1\}, \{J_1, J_2, J_3\}, \{+\frac{3}{2}\}, \{-1\}}(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3, \Lambda p_4) \quad (3.34)$$

と変換する。ここで、スピン $\frac{1}{2}$ の粒子の little group による変換を W , ヘリシティ $+\frac{1}{2}$ の零質量粒子が little group による変換を $e^{i\theta}$ としている。

3.2.2 Tree 散乱振幅の解析性

Tree 散乱振幅は内線が on-shell になる部分からのみ発散の寄与がくる。実際、相互作用が局所的な理論を考えてよう。ファインマンルールで頂点に課されるのは微分項からくる運動量の正冪か結合定数のみであり、分母にくるのは内線の伝播関数からのみである。例えば、4 点散乱振幅を考えてみよう。ここで、4 点のときによく用いられる s, t, u チャネルという概念を導入する。 s, t, u は 4 点散乱振幅の時の Mandelstam 変数である。 n 点散乱振幅においては Mandelstam 変数は $s_{ij} = -(p_i + p_j)^2, s_{ijk} = -(p_i + p_j + p_k)^2, \dots$ のように定義される。4 点の時は $s = s_{12}, t = s_{13}, u = s_{14}$ である。これらを使うと 4 点 tree 散乱振幅は s, t, u チャネルと接触項からなることがわかる。ファインマンダイアグラムでかくと

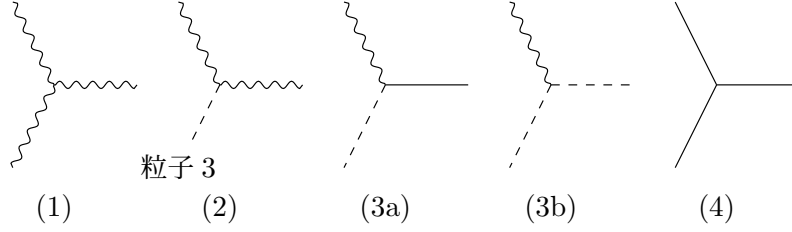


のようになり、内線が on-shell となる運動量での留数は 3 点 tree の on-shell 散乱振幅から求めることができる。

3.2.3 on-shell 3 点振幅

little group の表現として on-shell 散乱振幅が変換することと運動量保存則を用いて on-shell 3 点振幅が定数倍を除いて決定できることを示していこう。では 3 つの外線の場合分けをしよう。考える場合 (1) 3 本すべてが零質量の場合、(2) 2 本が零質量, 1 本が有質量の場合、(3a) 2 本が異なる質量の有質量, 1 本が零質量の場合、(3b) 2 本が同質量の有質量, 1 本が零質量の

場合、(4) 3本が有質量の場合の全5通りである。ファインマン図でまとめると以下のようになる。



ここで、波線は零質量粒子を、波線と直線は有質量粒子を表している。以下、粒子 $i = 1, 2, 3$ の運動量を p_i とする。

(1) 3本すべてが零質量の場合

運動量保存則から $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ であるが、これを零質量 spinor-helicity formalism で書き直すと $|1\rangle [1+|2\rangle [2+|3\rangle [3] = 0, |1\rangle \langle 1+|2\rangle \langle 2+|3\rangle \langle 3] = 0$ となる。ここで、三角 spinor または四角 spinor か、bra または ket かで $SU(2)$ の添字 a, \dot{a} とその添字の上下はわかるので省略した。 $0 = p_3^2 = (p_1 + p_2) = \langle 12\rangle [12]$ であるから、 $\langle 12\rangle = 0$ または $[12] = 0$ となる。では初めに、 $[12] = 0$ の場合を考えてみよう。 spinor-helicity で記述した運動量保存則の第一式を $|1\rangle$ と内積を取れば $0 = |1\rangle [11] + |2\rangle [21] + |3\rangle [31] = |3\rangle [31]$ となるため、 $[31] = 0$ となる。また、 $|2\rangle$ と内積をとれば $0 = |1\rangle [12] + |2\rangle [22] + |3\rangle [32] = |3\rangle [32]$ となるため、 $[23] = 0$ となる。つまり、 $[12] = [23] = [31] = 0$ となるため on-shell 散乱振幅は $\langle 12\rangle, \langle 23\rangle, \langle 31\rangle$ の三角 spinor のヘリシティのみで記述されなければならない。次に、 $\langle 12\rangle = 0$ の時も同様な議論ができ $[12] = [23] = [31] = 0$ が示せ、 $[12], [23], [31]$ の四角 spinor のヘリシティのみで on-shell 散乱振幅が記述されなければならない。これを本修論の notation で換言すると、ヘリシティが $+$ の outgoing 粒子が関わる 3点 on-shell 散乱振幅は四角 spinor のみの kinematics のみを持ち、ヘリシティが $-$ の outgoing 粒子が関わる 3点 on-shell 散乱振幅は三角 spinor のみの kinematics を持つということである。実は、全ての運動量が実の時 $\langle 12\rangle = [21]^* = 0$ なので on-shell 散乱振幅は消える。そのため、上の議論は on-shell 条件を満たす複素な運動量を持つ外線考えたとき kinematics はどうなるかという議論をしていた。

それでは、散乱振幅は little group の表現になっていることに着目しよう。今、3本の外線のヘリシティを h_1, h_2, h_3 とする。 $h_i (i = 1, 2, 3)$ は $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$ のいずれかの値である。この3点 on-shell 散乱振幅 $A_3^{h_1, h_2, h_3}$ は little group によって

$$A_3^{h_1, h_2, h_3} \rightarrow e^{2i(h_1+h_2+h_3)\theta} A_3^{h_1, h_2, h_3} \quad (3.35)$$

と変換する。 $A_3 \propto [12]^{x_{12}} [23]^{x_{23}} [31]^{x_{31}}$ か $A_3 \propto \langle 12\rangle^{y_{12}} \langle 23\rangle^{y_{23}} \langle 31\rangle^{y_{31}}$ と冪依存性をおきヘリシティからくる little group での回転量と一致させよう。 $|1\rangle_a$ はヘリシティ $-\frac{1}{2}$ の outgoing の粒子に対応する spinor であったことを思い出すと $|1\rangle \rightarrow e^{-i\theta}|1\rangle (|1\rangle^{\dot{a}}$ は逆位相の回転) と

little group 依存性があるから

$$-x_{12} - x_{31} = 2h_1, \quad -x_{23} - x_{12} = 2h_2, \quad -x_{31} - x_{23} = 2h_3, \quad (3.36)$$

$$y_{12} + y_{31} = -2h_1, \quad y_{23} + y_{12} = -2h_2, \quad y_{31} + y_{23} = -2h_3 \quad (3.37)$$

である。ここで、相互作用が局所であることを要請しよう。〈12〉, [12] は質量次元 1 なので、kinematic で決まる項が $\pm(h_1 + h_2 + h_3)$ となる。kinematic で決まる項の質量次元が負となる相互作用は、場からくる spinor-helicity の寄与が正の質量次元であることを鑑みて、 $1/\partial^2$ のような分母に微分項がくるもの考える必要があり局所な相互作用ではなくなる。したがって、3 点 on-shell 散乱振幅は結合定数を g とおくと

$$A_3^{h_1, h_2, h_3} = \begin{cases} g[12]^{-h_1-h_2+h_3} [23]^{h_1-h_2-h_3} [31]^{-h_1+h_2-h_3} & (h_1 + h_2 + h_3 < 0 \text{ の時}) \\ \tilde{g}\langle 12 \rangle^{h_1+h_2-h_3} \langle 23 \rangle^{-h_1+h_2+h_3} \langle 31 \rangle^{h_1-h_2+h_3} & (h_1 + h_2 + h_3 > 0 \text{ の時}) \end{cases} \quad (3.38)$$

のようにかける。ここで、ヘリシティが異なる粒子では異なる結合定数でも良いので \tilde{g} と三角 spinor と四角 spinor で結合定数を変えている。以上の議論をまとめると、遷移確率を時空の並進対称性を用いて運動量保存則を除き 3 点 on-shell 散乱振幅の kinematics を粒子の little group を用いて決定してきた。つまり、ポアンカレ対称性から 3 点 on-shell 散乱振幅は結合定数を除いて決まることがわかった。

(2) 2 本が零質量, 1 本が有質量の場合

粒子 1, 2 がヘリシティ h_1, h_2 の零質量粒子, 粒子 3 がスピン s の有質量粒子とすると、3 点 on-shell 散乱振幅は $A_3^{\{I_1 \dots I_{2s}\}, h_1, h_2}$ と有質量粒子の little group に対応する $SL(2, \mathbb{C})$ の添字を $2s$ 個持つ完全対称テンソルとなる。有質量粒子のヘリシティの添字 a, \dot{a} は $(p_3)_{a\dot{a}}$ を用いて a に統一することができた。そこで、有質量粒子の spinor-helicity を用いて

$$A_3^{\{I_1 \dots I_{2s}\}, h_1, h_2} =: \frac{1}{m_3^s} |p_3^{I_1}\rangle_{a_1} \cdots |p_3^{I_{2s}}\rangle_{a_{2s}} A^{\{a_1, \dots, a_{2s}\}, h_1, h_2} \quad (3.39)$$

のように spinor の添字を a に揃えた散乱振幅 $A^{\{a_1, \dots, a_{2s}\}, h_1, h_2}$ を定義しよう。ここで、 $A^{\{a_1, \dots, a_{2s}\}, h_1, h_2}$ は $SU(2)$ の添字 a を $2s$ 個持つ完全対称テンソルとなっており、 m_3^{-s} の係数は spinor-helicity で添字を変換する際、散乱振幅の質量次元が変わらないように調整するために粒子 3 の質量 m_3 を用いた。

では、3 点 on-shell 振幅の kinematics を決めて行こう。通常通り添え字の上げ下げは Levi-Civita 記号で行うものとして $A_{a_1, \dots, a_{2s}}^{h_1, h_2}$ を決めていこう。粒子 1 と 2 は独立なので 2 成分ある四角 spinor の基底として $|1\rangle_a, |2\rangle_a$ を選ぼう。運動量保存則から $-m_3^2 = p_3^2 = (p_1 + p_2)^2 = \langle 12 | [12] \rangle$ が成立するので零質量の kinematics を表す項は $[12]$ のみを用いて記述でき、3 点 on-shell 振幅は結合定数を g として

$$A_{a_1, \dots, a_{2s}}^{h_1, h_2} = \frac{g}{m_3^{s+y-1}} (|1\rangle^{s+x} |2\rangle^{s-x})_{\{a_1 \dots a_{2s}\}} [12]^y \quad (3.40)$$

とおける。ここで、 x, y はこれから零質量粒子の little group で決まる冪依存性、 $1/m_3^{s+y-1}$ は結合定数を無次元にするためにかけられた項、 $(|1]^{s+x}|2]^{s-x})_{\{a_1 \dots a_{2s}\}}$ は $s+x$ 個の四角 spinor $|1]_a$ と $s-x$ 個の四角 spinor $|2]_a$ を用いて作られた $2s$ 階の完全対称テンソルである。また、 n 点散乱振幅の質量次元が $4-n$ であることを用いた。これは遷移確率と S 行列は無次元、生成消滅演算子が質量次元 -1 、運動量保存則 $\hat{\delta}^{(4)}(p)$ は質量次元 -4 であることから従う。では、零質量の little group を用いて x, y を決めて行こう。零質量の little group によって 3 点 on-shell 散乱振幅は

$$A_{a_1, \dots, a_{2s}}^{h_1, h_2} \rightarrow e^{2ih_1\theta} e^{2ih_2\theta} A_{a_1, \dots, a_{2s}}^{h_1, h_2} \quad (3.41)$$

と変換する。したがって、

$$s+x+y = -2h_1, \quad s-x+y = -2h_2, \quad (3.42)$$

$$x = h_2 - h_1, \quad y = -s - h_1 - h_2 \quad (3.43)$$

が従い、2 本零質量で、1 本有質量の時の 3 点 on-shell 散乱振幅は

$$A_{a_1, \dots, a_{2s}}^{h_1, h_2} = \frac{g}{m_3^{-h_1-h_2-1}} (|1]^{s-h_1+h_2} |2]^{s+h_1-h_2})_{\{a_1 \dots a_{2s}\}} [12]^{-s-h_1-h_2} \quad (3.44)$$

$$= \frac{g}{m^{2s+h_1+h_2-1}} (|1]^{s-h_1+h_2} |2]^{s+h_1-h_2})_{\{a_1 \dots a_{2s}\}} \langle 21 \rangle^{s+h_1+h_2} \quad (3.45)$$

と結合定数を除いて決まる。この式を見ると、テンソル部分の冪は 0 以上でなければならないので $|h_1 - h_2| > s$ の時散乱振幅は消えることがわかる。したがって、スピン s の粒子の静止系での $|h_1| = |h_2|$ を満たす零質量粒子への崩壊を考えると、 $2|h_1| > s$ の時 3 点散乱振幅は消える。具体的に、 $|h_1| = |h_2| = s = 1$ の時に適用すると「スピン 1 の粒子は光子に崩壊できない」という Yang の定理が成り立つことがわかる。

(3a) 1 本が零質量, 2 本が異なる質量の有質量粒子の場合

粒子 1 がヘリシティ h_1 の零質量粒子、粒子 2, 3 がそれぞれスピン s_2, s_3 の有質量粒子とする。この時、3 点 on-shell 散乱振幅は $A_3^{h_1, \{I_1, I_2, \dots, I_{2s_2}\}, \{J_1, J_2, \dots, J_{2s_3}\}}$ と有質量粒子の little group の添字を持つ。(2) の時と同様に有質量粒子の四角 spinor $|p_2^I] |p_3^J]_a$ を用いて spinor 添字を持つ散乱振幅の添字を

$$\begin{aligned} & A_3^{h_1, \{I_1, I_2, \dots, I_{2s_2}\}, \{J_1, J_2, \dots, J_{2s_3}\}} \\ &= \frac{1}{m_2^{s_2} m_3^{s_3}} |p_2^{I_1}]_{a_1} \cdots |p_2^{I_{2s_2}}]_{a_{2s_2}} |p_3^{J_1}]_{b_1} \cdots |p_3^{J_{2s_3}}]_{b_{2s_3}} A^{h_1, \{a_1, \dots, a_{2s_2}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_3}\}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

のように変換する。四角 spinor の基底として $u_a = |1]_a, v_a = \frac{(p_2)_{ab}}{m_2} |1]$ と選び、spinor のテンソル構造を決めて行こう。つまり、以下のように次元を合わせる質量や結合定数の部分を無視したテンソル構造だけ書くと x を零質量粒子の little group から決める量として

$$A_{\{a_1, \dots, a_{2s_2}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_3}\}}^{h_1} \propto (u^{s_2+s_3+x} v^{s_2+s_3-x})_{\{a_1, \dots, a_{2s_2}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_3}\}} \quad (3.47)$$

のようにかける。粒子1のヘリシティが h_1 なので $(s_2 + s_3 + x) + (s_2 + s_3 - x) = 2x = -2h_1$ となり $x = -h_1$ と決まる。では、 u_a を $s_2 + s_3 + h_1$ 個、 v_a を $s_2 + s_3 - h_1$ 個を構成要素として $2s_2$ 個の添え字に対して完全対称、 $2s_3$ 個の添え字に関して完全対称なテンソル構造が何個あるか考えてみよう。これは、スピン s_2 とスピン s_3 を合成した時、幾つの既約表現に直和分解されるかと同じ問題である。つまり、スピン s_2 とスピン s_3 の粒子を合成するとスピンの直和表現に分解される。したがって、テンソル構造は $s_2 + s_3 - |s_2 - s_3| + 1$ 通りある。では、具体的に $s_2 = 2, s_3 = 1, h_1 = 1$ の時を見てみよう。この時

$$(u^2 v^4)_{\{a_1, \dots, a_4\}, \{b_1, b_2\}} = \begin{cases} (v^4)_{\{a_1, \dots, a_4\}} (u^2)_{\{b_1, b_2\}} = v_{a_1} v_{a_2} v_{a_3} v_{a_4} u_{b_1} u_{b_2} \\ (uv^3)_{\{a_1, \dots, a_4\}} (uv)_{\{b_1, b_2\}} \end{cases} \quad (3.48)$$

の3通りとなる。具体的に、 $(uv)_{\{b_1, b_2\}}, (uv^3)_{\{a_1, \dots, a_4\}}, (u^2 v^2)_{\{a_1, \dots, a_4\}}$ のテンソル構造を書くと、添字に関して対称化すれば良いから

$$(uv)_{\{b_1, b_2\}} = \frac{1}{2}(u_{b_1} v_{b_2} + v_{b_2} u_{b_1}), \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} (uv^3)_{\{a_1, \dots, a_4\}} &= \frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in S_\Delta} u_{a_{\sigma(1)}} v_{a_{\sigma(2)}} v_{a_{\sigma(3)}} v_{a_{\sigma(4)}} \\ &= \frac{1}{4}(u_{a_1} v_{a_2} v_{a_3} v_{a_4} + v_{a_1} u_{a_2} v_{a_3} v_{a_4} + v_{a_1} v_{a_2} u_{a_3} v_{a_4} + v_{a_1} v_{a_2} v_{a_3} u_{a_4}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} (u^2 v^2)_{\{a_1, \dots, a_4\}} &= \frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in S_4} u_{a_{\sigma(1)}} u_{a_{\sigma(2)}} v_{a_{\sigma(3)}} v_{a_{\sigma(4)}} \\ &= \frac{1}{6}(u_{a_1} u_{a_2} v_{a_3} v_{a_4} + v_{a_1} u_{a_2} u_{a_3} v_{a_4} + v_{a_1} u_{a_2} v_{a_3} u_{a_4} \\ &\quad + u_{a_1} v_{a_2} u_{a_3} v_{a_4} + v_{a_1} v_{a_2} u_{a_3} u_{a_4} + u_{a_1} v_{a_2} v_{a_3} u_{a_4}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

となる。ここで、 S_4 は要素数が4個の集合の置換群である。置換群の位数が小さいときに具体的にテンソル構造を書き出すときは、 Σ の公式に当てはめるといより各ペアに関して対称になるように項を加えていくのが良い。

(3b) 2本が同質量の有質量, 1本が零質量の場合

粒子1がヘリシティ h_1 の零質量粒子、粒子2, 3がそれぞれスピン s_2, s_3 の質量 $m_2 = m_3 = m$ の有質量粒子とする。(3a)の場合と同様に3点 on-shell 散乱振幅 $A_3^{h_1, \{I_1, \dots, I_{2s_2}\}, \{J_1, \dots, J_{2s_3}\}}$ をヘリシティの添字に変換する:

$$\begin{aligned} &A_3^{h_1, \{I_1, I_2, \dots, I_{2s_2}\}, \{J_1, J_2, \dots, J_{2s_3}\}} \\ &= \frac{1}{m^{s_2+s_3}} |p_2^{I_1}\rangle_{a_1} \cdots |p_2^{I_{2s_2}}\rangle_{a_{2s_2}} |p_3^{J_1}\rangle_{b_1} \cdots |p_3^{J_{2s_3}}\rangle_{b_{s_3}} A^{h_1, \{a_1, \dots, a_{2s_2}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_3}\}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

ここで、(3a)と同様にヘリシテイの基底 $(u_a, v_a) = (|1\rangle_a, \frac{(p_2)_{a\dot{a}}}{m} |1\rangle^{\dot{b}})$ と選びたい。だが、有質量粒子同士が同質量であることと運動量保存則より $-m^2 = (p_3)^2 = (k_1 + p_2)^2 = -m^2 + 2k_1 \cdot p_2$, つまり、 $0 = 2k_1 \cdot p_2 = (p_2)_\mu \langle 1 | \gamma^\mu | 1 \rangle = \langle 1 | p_2 | 1 \rangle$ となる。ここで、粒子 1 の運動量が $2k_1^\mu = \langle 1 | \gamma^\mu | 1 \rangle$ とかけることを用いた。したがって、 $u^a v_a = 0$ となってしまう、四角 spinor 空間の基底としたい u_a, v_a が線形独立でない。運動量保存則から $(p_2)_{a\dot{b}} |1\rangle^{\dot{b}} = -(p_3)_{a\dot{b}} |1\rangle^{\dot{b}}$ なので、 $|1\rangle_a$ と線型独立な四角 spinor を構成できない。そこで、3 点の kinematics を記述する要素として線形従属な四角 spinor u_a と v_a の比例定数に着目しよう。比例定数を x とすると

$$v_a = x u_a \Leftrightarrow x |1\rangle_a = \frac{(p_2)_{a\dot{b}}}{m} |1\rangle^{\dot{b}} \quad (3.53)$$

であり、両辺に $(p_2)^{a\dot{b}}$ をかけることで三角 spinor の言葉では

$$\frac{1}{x} |1\rangle^{\dot{a}} = \frac{(p_2)^{a\dot{b}}}{m} |1\rangle_b \quad (3.54)$$

となる。以降、 x をそのまま x 因子と呼んでいこう。零質量粒子 1 の little group に対して x 因子は、ヘリシテイが $+1$ の変換性を持つ。つまり、 $|1\rangle \rightarrow e^{-i\theta} |1\rangle, |1\rangle \rightarrow e^{i\theta} |1\rangle$ と little group で回すと $x \rightarrow e^{2i\theta} x$ と変換する。 x 因子の定義式を任意のレファレンス spinor $|\zeta\rangle$ で内積を取れば

$$x = \frac{[\zeta | p_2 | 1]}{m[\zeta 1]} \quad (3.55)$$

となる。例えば、光子との相互作用を考えたときの偏光ベクトルに対応するのが x 因子であることが分かる。また、分母に $[\zeta 1]$ と spurious な極があるため x 因子自体は非局所的である。Levi-Civita 記号は不変テンソルであったことを思い出すと、3 点 on-shell 散乱振幅を構成する要素は $x, |1\rangle_a, \epsilon_{ab}$ であり、

$$A_{\{a_1, \dots, a_{2s_2}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_3}\}}^{h_1} = \sum_{i=|s_2-s_3|}^{s_2+s_3} g_i x^{h_1+i} (|1\rangle^{2i} \epsilon^{s_2+s_3-i})_{\{a_1, \dots, a_{2s_2}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_3}\}} \quad (3.56)$$

と結合定数を g_i として 3 点 on-shell 散乱振幅がもとまる。ここで、 x の冪は零質量粒子 1 の little group 依存性からもとまり各 i でのテンソル $(|1\rangle^{2i} \epsilon^{s_2+s_3-i})_{\{a_1, \dots, a_{2s_2}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_3}\}}$ は

$$\epsilon_{a_1 b_1} \cdots \epsilon_{a_{s_2+s_3-i} b_{s_2+s_3-i}} |1\rangle_{a_{s_2+s_3+1-i}} \cdots |1\rangle_{a_{2s_2}} |1\rangle_{b_{s_2+s_3+1-i}} \cdots |1\rangle_{b_{2s_3}} \quad (3.57)$$

を $a_1 \cdots a_{2s_2}$ と b_1, \dots, b_{2s_3} に関して完全対称にしたテンソルである。ちなみに、(3a) の場合で不変テンソルが出てこないのは u_a, v_a が四角 spinor 空間の完全系を張っており $u_a v_b - u_b v_a = (u^a v_a) \epsilon_{ab}$ となっているためである。

(4) 3 本全てが有質量な場合

粒子 1, 2, 3 のスピンをそれぞれ s_1, s_2, s_3 とする。これまでと同様に 3 点 on-shell 散乱振幅を有質量 little group の添字からヘリシティの添字に変換する:

$$\begin{aligned} A_3^{\{I_1, \dots, I_{2s_1}\}, \{J_1, \dots, J_{2s_2}\}, \{K_1, \dots, K_{2s_3}\}} \\ = |p_1^{I_1}\rangle_{a_1} \cdots |p_1^{I_{2s_1}}\rangle_{a_{2s_1}} |p_2^{J_1}\rangle_{b_1} \cdots |p_2^{J_{2s_2}}\rangle_{b_{2s_2}} |p_3^{K_1}\rangle_{c_1} \cdots |p_3^{K_{2s_3}}\rangle_{c_{2s_3}} \\ A_3^{\{a_1, \dots, a_{2s_1}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_2}\}, \{c_1, \dots, c_{2s_3}\}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

今回は零質量の外線がないので四角 spinor 空間を貼る spinor がない。そこで、2 つ添字を持ったテンソルを基本構成要素とする。添字 2 個のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルに分解できるので反対称テンソルは Levi-Civita 記号とし、対称テンソル \mathcal{O}_{ab} は

$$\mathcal{O}_{ab} = (p_1)_{\{ab}(p_2)_{b\}^{\dot{b}} = \frac{1}{2}((p_1)_{ab}(p_2)_{b\}^{\dot{b}} + (p_1)_{bb}(p_2)_a^{\dot{b}}) \quad (3.59)$$

と選ぶ。ここで、 $\{\}$ を用いて添字を対称化する notation を用いた。4 階のテンソル $\mathcal{O}_{ab}\mathcal{O}_{cd} - \mathcal{O}_{ac}\mathcal{O}_{bd}$ のような bc に関して反対称なものを考えると、 \mathcal{O}_{ab} が対称テンソルであるから ad に関しても反対称になり $\epsilon_{bc}\epsilon_{ad}$ に比例することが分かる。つまり、Levi-Civita 記号が 2 個以上出てくるテンソルは全て \mathcal{O}_{ab} に書き換えることができる。したがって、3 点 on-shell 散乱振幅を構成するテンソルは Levi-Civita が 0 個のものか 1 つのものであり、形式的に

$$\begin{aligned} A_3^{\{a_1, \dots, a_{2s_1}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_2}\}, \{c_1, \dots, c_{2s_3}\}} \\ = \sum_{i=0}^1 \sum_{\sigma_i} g_{\sigma_i} (\mathcal{O}^{s_1+s_2+s_3-i} \epsilon^i)^{\sigma_i} \{a_1, \dots, a_{2s_1}\}, \{b_1, \dots, b_{2s_2}\}, \{c_1, \dots, c_{2s_3}\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

とかけることがわかった。ここで、 σ_i は Levi-Civita 記号を i 個含む時のテンソル構造を識別するラベルで、 g_{σ_i} はそのテンソル構造に関する結合定数である。

■高エネルギー極限 上で 3 点散乱振幅の kinematics が little group から決まることをみた。有質量粒子の運動量が大きい極限では、有質量 spinor-helicity も零質量の spinor-helicity で記述できるはずである。このような高エネルギー極限を直観的に記述できる BOLD notation をここで導入する。例えば、3 点 on-shell 散乱振幅の (2) の場合のようなヘリシティが h_1, h_2 の零質量粒子 1, 2 と質量 m 、スピン s の有質量粒子 3 の on-shell 散乱振幅は

$$\begin{aligned} A_3^{h_1, h_2, \{I_1, \dots, I_{2s}\}} = \frac{g}{m^{2s+h_1+h_2-1}} \langle 21 \rangle^{s+h_1+h_2} \underbrace{[3^{I_1 1}] \dots [3^{I_{s+h_1-h_2} 1}]}_{s-h_1+h_2} \underbrace{[3^{I_{s+h_1-h_2+1} 2}] \dots [3^{I_{2s} 2}]}_{s+h_1-h_2} \\ + (I_1, \dots, I_{2s} \text{ に関して対称化}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

と書けていた。この有質量粒子の little group の添字を完全対称化する操作は、どの spinor と内積をとっているかが分かれば曖昧さのない操作である。太字を用いて有質量粒子の little group に関して対称化していることを示すのが BOLD notation であり、上の例では

$$A_3^{h_1, h_2, \{I_1, \dots, I_{2s}\}} = \frac{g}{m^{2s+h_1+h_2-1}} \langle 21 \rangle^{s+h_1+h_2} [\mathbf{31}]^{s-h_1+h_2} [\mathbf{32}]^{s+h_1-h_2} \quad (3.62)$$

となる。

それでは、BOLD notation では高エネルギー極限を扱いやすいことを見ていこう。有質量粒子の little group が作用する 2 次元空間の基底を $(\zeta^\pm)^I$ と選ぼう。この \pm という基底のラベルは、物理的にはスピンの量子化軸方向の固有値が \pm に対応している。つまり、スピンの量子化軸を n_i としたとすると $n_i \cdot (\sigma^i)^I{}_J (\zeta^\pm)^J = \pm (\zeta^\pm)^I$ (複合同順, σ^i は Pauli 行列) のように選べる。 ζ^\pm の規格化は $\epsilon_{IJ} (\zeta^+)^I (\zeta^-)^J = 1$ と選ぶことにして、有質量 spinor-helicity $|p^I]_a$ は零質量の spinor-helicity λ_a, η_a を用いて

$$|p^I]_a = \lambda_a (\zeta^-)^I + \eta_a (\zeta^+)^I, \quad (3.63)$$

$$\langle p^I |_{\dot{a}} = \tilde{\lambda}_{\dot{a}} (\zeta^+)^I - \tilde{\eta}_{\dot{a}} (\zeta^-)^I \quad (3.64)$$

とかける。ここで、 λ_a, η_a の規格化は $[\lambda\eta] = \lambda^a \eta_a = m, \langle \tilde{\lambda}\tilde{\eta} \rangle = \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \tilde{\eta}^{\dot{a}} = -m$ としており、チルダは $\tilde{\lambda}_{\dot{a}} = (\lambda_a)^*$ のように複素表現への変換を表す。例えば、粒子の運動量を $p^\mu = (E, p \sin \theta \cos \varphi, p \sin \theta \sin \varphi, p \cos \theta)$ とパラメタ E, p, θ, φ を用いて表すと、 $p_{a\dot{a}}$ は

$$\begin{aligned} p_{a\dot{a}} &= \begin{pmatrix} -E - p \cos \theta & pe^{-i\varphi} \sin \theta \\ pe^{i\varphi} \sin \theta & -E + p \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= -(E+p) \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &\quad - (E-p) \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= -(E+p) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &\quad - (E-p) \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= |p^I]_a \langle p^I |_{\dot{a}} = -\lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}} + \eta_a \tilde{\eta}_{\dot{a}} \end{aligned} \quad (3.65)$$

である。スピンの量子化軸を運動量方向に選んだ ζ^\pm をとると、ヘリシティと同じ向きなので $\lambda_a = \sqrt{E+p} (\zeta^-)_a, \eta_a = \sqrt{E-p} (\zeta^+)_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}} = \sqrt{E+p} (\tilde{\zeta}^-)_{\dot{a}}, \tilde{\eta}_{\dot{a}} = \sqrt{E-p} (\tilde{\zeta}^+)_{\dot{a}}$ と書き下せる。ここで、添字が上から下にさがっており、 2×1 の行列として $\zeta^a = \zeta^I$ と等しくそれを Levi-Civita 記号で下げている。この表示は $p^\mu = (m, \vec{0})$ の時 θ, φ の依存性が曖昧になるが、粒子の静止系では

$$|p^I]_a = \sqrt{m} \delta_a^I, \quad \langle p^I |_{\dot{a}} = \sqrt{m} \delta_{\dot{a}}^I \quad (3.66)$$

と選ぶ。このように選ぶと、ローレンツ回転を用いて

$$|p^1]_a = e^{-i\frac{\lambda}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} \begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |p^2]_a = e^{-i\frac{\lambda}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{m} \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

$$\langle p^1 |_{\dot{a}} = e^{i\frac{\lambda}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} \begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle p^2 |_{\dot{a}} = e^{i\frac{\lambda}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{m} \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

とかける。ここで、 $\vec{n} = \vec{p}/p$ は運動量の方角で、 λ は rapidity ($\tanh \lambda = p/E$) である。

高エネルギー極限 ($p \rightarrow \infty$) を考えると $\sqrt{E+p} \rightarrow \sqrt{2E}$, $\sqrt{E-p} \rightarrow m/\sqrt{2E}$ となるので、 $\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ が大きくなり $\eta_a, \tilde{\eta}_{\dot{a}}$ は相対的に寄与が小さくなる。では、特殊相対論的に不変な形式で高エネルギー極限を取ることを考えよう。高エネルギー極限で $\eta_a \propto m$ と振る舞うことがわかったので、 $\hat{\eta} := \eta_a/m, \tilde{\hat{\eta}}_{\dot{a}} := \tilde{\eta}_{\dot{a}}/m$ を導入する。 λ_a, η_a の規格化の条件から $[\lambda\hat{\eta}] = 1, \langle \tilde{\lambda}\tilde{\hat{\eta}} \rangle = -1$ である。有質量粒子 1,2 の spinor-helicity を上のように分解したとき λ_a に対応するものを $\lambda_a^{(1)}, \lambda_a^{(2)}$ と書くことにすると

$$\frac{m}{[\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}]}, \frac{m}{\langle \tilde{\lambda}^{(1)}\tilde{\lambda}^{(2)} \rangle} \rightarrow 0 \quad (3.69)$$

という極限を取れば良いことが分かる。

では、ここで具体的に ζ^\pm と λ_a がどう書けるか見てみよう。運動量方向 $\vec{n} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$ を量子化軸とすると量子化軸方向のパウリ行列は

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & e^{-i\varphi} \sin\theta \\ e^{i\varphi} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

と書ける。この量子化軸に対する ζ^\pm は

$$(\zeta^-)^I = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (\zeta^+)^I = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

と選べる。よって、 λ_a, η_a を明示的に書き表すと

$$\lambda_a = \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \eta_a = -\sqrt{E-p} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

$$\tilde{\lambda}_{\dot{a}} = \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -e^{-i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta}_{\dot{a}} = -\sqrt{E-p} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

のようになる。

では、有質量 spinor-helicity をスピン要素とヘリシティ要素に分解できたので、散乱振幅をヘリシティ基底に分解していく。例えば、1つのスピン s の有質量粒子が関わる on-shell 散乱振幅 $A^{\{I_1, \dots, I_{2s}\}}$ は

$$A^{\{I_1, \dots, I_{2s}\}} = \sum_{h=-s}^s ((\zeta^+)^{s+h} (\zeta^-)^{s-h})^{\{I_1, \dots, I_{2s}\}} A_h(\lambda, \tilde{\lambda}; \eta, \tilde{\eta}) \quad (3.74)$$

とヘリシティ h の成分 $A_h(\lambda, \tilde{\lambda}; \eta, \tilde{\eta})$ に分解される。ここで、 λ_a は ζ^- と η_a は ζ^+ と組になっていたことを思い出すと、ヘリシティ h の成分は

$$A_h(e^{-i\theta} \lambda, e^{i\theta} \tilde{\lambda}; e^{i\theta} \eta, e^{-i\theta} \tilde{\eta}) = e^{2h\theta} A_h(\lambda, \tilde{\lambda}; \eta, \tilde{\eta}) \quad (3.75)$$

と変換することが分かる。したがって、高エネルギー極限をとった時の散乱振幅のヘリシティ h 成分は

$$\lim_{m \rightarrow 0} A_h(\lambda, \tilde{\lambda}; m\hat{\eta}, m\tilde{\hat{\eta}}) \quad (3.76)$$

であることがわかる。

それでは、零質量スカラー 2 本とスピン 1 の有質量粒子の 3 点 on-shell 散乱振幅で具体的に
見てみよう。この散乱振幅 A_3 は

$$A_3 = \frac{[31][32]}{[12]} \quad (3.77)$$

である。ここでは、少し記法の濫用になるが有質量粒子の運動量方向の spinor-helicity (上の
例で言う λ_a) を $|3]_a$ と little group の添字なしで書くことにすると

$$|3^I]_a = |3]_a(\zeta^-)^I + m\hat{\eta}_a(\zeta^+)^I \quad (3.78)$$

と書ける。上の 3 点 on-shell 散乱振幅は、little group の添字の対称化前では

$$\begin{aligned} A_3^{I_1 I_2} &= [12]^{-1} ([31](\zeta^-)^{I_1} + m[\hat{\eta}1](\zeta^+)^{I_1}) ([32](\zeta^-)^{I_2} + m[\hat{\eta}2](\zeta^+)^{I_2}) \\ &= (\zeta^+)^{I_1} (\zeta^+)^{I_2} \frac{m^2[\hat{\eta}1][\hat{\eta}2]}{[12]} + (\zeta^+)^{I_1} (\zeta^-)^{I_2} \frac{m[\hat{\eta}1][32]}{[12]} \\ &\quad + (\zeta^-)^{I_1} (\zeta^+)^{I_2} \frac{m[\hat{\eta}2][31]}{[12]} + (\zeta^-)^{I_1} (\zeta^-)^{I_2} \frac{[31][32]}{[12]} \end{aligned} \quad (3.79)$$

となる。これを添え字に関して対称化すれば $(\zeta^+\zeta^+)^{\{I_1, I_2\}} = (\zeta^+)^{I_1} (\zeta^+)^{I_2}$ の係数からヘリシ
ティ $h = 1$ の項が

$$\begin{aligned} \frac{m^2[\hat{\eta}1][\hat{\eta}2]}{[12]} &= \frac{m^2[\hat{\eta}1][\hat{\eta}2] \langle 21 \rangle}{[12] \langle 21 \rangle} = [\hat{\eta}1][\hat{\eta}3] \langle 31 \rangle = [\hat{\eta}1] \langle 13 \rangle = \frac{[\hat{\eta}1] \langle 12 \rangle \langle 13 \rangle}{\langle 12 \rangle} \\ &= \frac{[3\hat{\eta}] \langle 32 \rangle \langle 13 \rangle}{\langle 12 \rangle} = -\frac{\langle 31 \rangle \langle 32 \rangle}{\langle 12 \rangle} \end{aligned} \quad (3.80)$$

と分かる。ここで、1 つ目の等号で運動量保存 on-shell 条件 $m^2 = -(p_3)^2 = -(p_1 + p_2)^2 =$
 $\langle 12 \rangle [21]$ を用い、2 つ目の等号でも運動量保存則 $0 = |1]_a \langle 1|_{\dot{a}} + |2]_a \langle 2|_{\dot{a}} + |3]_a \langle 3|_{\dot{a}} + m^2 \hat{\eta}_a \tilde{\eta}_{\dot{a}}$
を分子の $[\hat{\eta}2] \langle 21 \rangle$ に用い、3 つ目と 5 つ目の等号で規格化条件 $[3\hat{\eta}] = 1$ を用いた。次に、
 $(\zeta^+\zeta^-)^{\{I_1, I_2\}} = \frac{1}{2}((\zeta^+)^{I_1} (\zeta^-)^{I_2} + (\zeta^+)^{I_2} (\zeta^-)^{I_1})$ の係数であるヘリシティ $h = 0$ の項は

$$\frac{m}{2[12]} ([\hat{\eta}1][32] + [\hat{\eta}2][31]) \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0 \quad (3.81)$$

と高エネルギー極限で消えることがわかる。最後に、 $(\zeta^-\zeta^-)^{\{I_1, I_2\}} = (\zeta^-)^{I_1} (\zeta^-)^{I_2}$ の係数か
らヘリシティ $h = -1$ の項が

$$\frac{[31][32]}{[12]} \quad (3.82)$$

と分かる。つまり、Bold notation を利用すると、高エネルギー極限をとったときの散乱振幅
がヘリシティに合わせて三角 spinor か四角 spinor かを選び太字を細字にすることで得られる。

となる。ここで $t = \langle 13 \rangle [13]$ であり、 s チャンネルの留数は t チャンネルの極を含む。このような他のチャンネルの留数が出てくる条件と 4点 tree 散乱振幅は s, t, u に関して 1 位の極であるという条件から 4点 tree 散乱振幅の関数形を決めていく。同様に t チャンネルの留数 R_t や、 u チャンネルの留数 R_u を計算すると

$$R_t = \left(\frac{[13]^2 \langle 24 \rangle^2}{s} \right)^h, \quad R_u = \left(\frac{[13]^2 \langle 24 \rangle^2}{t} \right)^h \quad (3.84)$$

となる。はじめに、具体例として $h = 1$ の時を考えてみよう。内線のヘリシティを固定した各チャンネルの留数を導くような関数形は A, B, C を定数として

$$[13]^2 \langle 24 \rangle^2 \left(\frac{A}{st} + \frac{B}{tu} + \frac{C}{us} \right) \quad (3.85)$$

と表せる。この関数形から s チャンネルの内線が on-shell ($s \rightarrow 0$) になる時の留数は $u \rightarrow -t$ に注意すると $A/t + C/u = (A - C)/t$ となる。したがって、上で留数と一致させて

$$A - C = 1, \quad B - A = -1, \quad B - C = 1 \quad (3.86)$$

となる。しかし、これは左辺を全て足すと 0 であるが右辺は 1 なので矛盾である。したがって、零質量でヘリシティ 1 の粒子は自己相互作用しないこと、つまり、光子は自己相互作用しないことが示された。それでは添字 a でラベルされた零質量でヘリシティ 1 の粒子の自己相互作用はどうだろうか。 a_1, a_2, a_3 でラベルされた 3点相互作用の結合定数を $f^{a_1 a_2 a_3}$ と書こう。kinematics は零質量 little group で決まるので

$$\begin{array}{c} 2_{a_2}^{-1} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ 3_{a_3}^{+1} \end{array} \quad 1_{a_1}^{-1} = f^{a_1 a_2 a_3} \frac{[12]^3}{[13][23]}$$

と表せる。ここで、結合定数のラベルは $a_1 a_2 a_3$ の順で反時計回りにラベルが並んでいることを表している。外線 1,2 はボソンなので上の 3点振幅は外線 1,2 の交換に対して不変でなければならない。四角 spinor で書かれている kinematics の項は外線 1,2 の交換に対して反対称なので結合定数は $f^{a_2 a_1 a_3} = -f^{a_1 a_2 a_3}$ とならなければならない。また、全て同じヘリシティの 3点振幅を考えると $f^{a_1 a_2 a_3}$ は完全反対称でなければならないことがわかる。上の 3点自己相互作用からなる 4点散乱振幅を考えると、それぞれ s, t, u チャンネルの極

$R_s^{a_1 a_2 a_3 a_4}, R_t^{a_1 a_2 a_3 a_4}, R_u^{a_1 a_2 a_3 a_4}$ は

$$R_s^{a_1 a_2 a_3 a_4} = f^{a_1 a_2 e} f^{e a_4 a_3} \frac{[13]^2 \langle 24 \rangle^2}{t}, \quad (3.87)$$

$$R_t^{a_1 a_2 a_3 a_4} = f^{a_3 a_1 e} f^{e a_2 a_4} \frac{[13]^2 \langle 24 \rangle^2}{s}, \quad (3.88)$$

$$R_u^{a_1 a_2 a_3 a_4} = f^{a_4 a_1 e} f^{e a_3 a_2} \frac{[13]^2 \langle 24 \rangle^2}{t} \quad (3.89)$$

と分かる。ここで、内線の零質量粒子のラベルを e とおき、 e について和をとっている。一方、上の留数を持つような局所的な相互作用で決まる 4 点 tree 振幅の関数形は

$$[13]^2 \langle 24 \rangle^2 \left(\frac{A^{a_1 a_2 a_3 a_4}}{st} + \frac{B^{a_1 a_2 a_3 a_4}}{tu} + \frac{C^{a_1 a_2 a_3 a_4}}{us} \right) \quad (3.90)$$

とおける。したがって、 s, t, u チャネルの留数の比較から

$$A^{a_1 a_2 a_3 a_4} - C^{a_1 a_2 a_3 a_4} = f^{a_1 a_2 e} f^{e a_4 a_3}, \quad (3.91)$$

$$B^{a_1 a_2 a_3 a_4} - A^{a_1 a_2 a_3 a_4} = -f^{a_3 a_1 e} f^{e a_2 a_4}, \quad (3.92)$$

$$C^{a_1 a_2 a_3 a_4} - B^{a_1 a_2 a_3 a_4} = -f^{a_4 a_1 e} f^{e a_3 a_2} \quad (3.93)$$

であり、上の 3 つの式の左辺を全て足すと 0 である。したがって、結合定数は

$$f^{a_1 a_2 e} f^{e a_3 a_4} + f^{a_2 a_3 e} f^{e a_1 a_4} + f^{a_1 a_3 e} f^{e a_4 a_2} = 0 \quad (3.94)$$

と Jacobi 恒等式を満たさなければならない。今までの議論をまとめると color-ordered 3 点振幅が kinematics で決まり、相互作用の局所性と S 行列のユニタリ性から color 部分の構造定数 $f^{a_1 a_2 a_3}$ が Jacobi 恒等式を満たすと言う条件を得た。つまり、 S 行列のユニタリ性と相互作用の局所性から、自己相互作用するスピン 1 の零質量粒子は Yang-Mills 相互作用をしなければならないことが言えた。

では、次にスピン 2 の零質量粒子の場合を考えてみよう。これは重力相互作用に対応する。 s チャネルの留数は $1/t^2$ に比例するので、一見すると相互作用の局所性に矛盾するが、 $s = 0$ の時 $t = -u$ なので、無矛盾な自己相互作用による 4 点散乱振幅は

$$\frac{[13]^4 \langle 24 \rangle^4}{stu} \quad (3.95)$$

が候補となる。実際、これは t, u チャネルの留数も再現する。また、これは重力子の 4 点散乱振幅と定数倍を除いて一致している。では、内部自由度を記述するラベル a を導入してみよう。スピン 1 の時と同じように結合定数を $g^{a_1 a_2 a_3}$ とすると

$$\begin{array}{c} 2_{a_2}^{-2} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ 3_{a_3}^{+2} \end{array} \text{---} 1_{a_1}^{-2} = g^{a_1 a_2 a_3} \frac{[12]^6}{[13]^2 [23]^2}$$

と表せる。今回は外線 1,2 の取り替えに対して kinematics で決まる項が対称なので結合定数も $g^{a_2 a_1 a_3} = g^{a_1 a_2 a_3}$ と対称になる。ヘリシティが全て同じ 3 点散乱振幅を考えれば $g^{a_1 a_2 a_3}$ が完全対称であることがわかる。この 3 点自己相互作用から無矛盾な 4 点 tree 散乱振幅を構成すると

$$= -\frac{[13]^4(24)^4}{stu} A^{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

となる。Kinematics の部分は a_1, a_3 と a_2, a_4 に関して対称であるから、 $A^{a_1 a_2 a_3 a_4}$ は a_1, a_3 と a_2, a_4 に関して対称なテンソルでなければならない。上で求めた留数と比較すれば

$$A^{a_1 a_2 a_3 a_4} = g^{a_1 a_2 e} g^{e a_3 a_4} = g^{a_1 a_3 e} g^{e a_2 a_4} = g^{a_1 a_4 e} g^{e a_2 a_3} \quad (3.96)$$

と関係式が立つ。この式から $A^{a_1 a_2 a_3 a_4} = g^{a_1 a_3 e} g^{e a_2 a_4}$ は完全対称であることがわかる。したがって、 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ であることがわかり、異なるラベル同士の相互作用はないことわかる。つまり、スピン 2 の零質量粒子は重力子かそれと同じ散乱振幅を持つ粒子のみである。では、スピンが 2 より大きい零質量粒子について考えよう。この時 s チャネルの留数は少なくとも u^{-3} なので、4 点 tree 散乱振幅は高々 s, t, u に関して 1 位の極であることと矛盾する。したがって、スピンが 2 より大きい零質量粒子は自己相互作用できない。

■零質量で異なる粒子の散乱 スピン 1 の零質量粒子がスピン s の零質量粒子と 2 体散乱する状況を考えよう。例えば、 $(1^{-s} 2^{-1} 3^{+s})$ のような 3 点振幅からなる 4 点散乱振幅を考えてみる。 $(1^{-s} 2^{-1} 3^{+s})$ のような 3 点振幅は前節の (1) の議論から

$$= \frac{[12]^{2s+1}[23]^{1-2s}}{[31]}$$

ともとまる。この相互作用による 2 体散乱振幅は s チャネルと u チャネルがあり、それらの留数は

$$R_s^{+-} = \quad , \quad R_u^{+-} =$$

となる。つまり、係数はスピン 1 の零質量粒子のラベル a に対応した行列があり、その行列成分はスピン s の零質量粒子のラベル i で指定する notation をとっている。ここから、光子の例と同様のヘリシティでの s, u チャネルでの 4 点散乱の留数は

$$R_s^{+-} = \begin{array}{c} 1_i^{-s} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2_a^{+1} \end{array} \begin{array}{c} I_k^{+s} \\ | \\ I_k^{-s} \end{array} \begin{array}{c} 4_j^{+s} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3_b^{-1} \end{array}, \quad R_u^{+-} = \begin{array}{c} 1_i^{-s} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2_a^{+1} \end{array} \begin{array}{c} I_k^{+s} \\ | \\ I_k^{-s} \end{array} \begin{array}{c} 4_j^{+s} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3_b^{-1} \end{array}$$

であり

$$R_s^{+-} = \frac{([13] \langle 24 \rangle)^{2s} \langle 2 | p_1 | 3 \rangle^{2-2s}}{u} \sum_k (T^a)_{ik} (T^b)_{kj} = \frac{([13] \langle 24 \rangle)^{2s} \langle 2 | p_4 | 3 \rangle^{2-2s}}{u} (T^a T^b)_{ij}, \quad (3.100)$$

$$R_u^{+-} = \frac{([13] \langle 24 \rangle)^{2s} \langle 2 | p_4 | 3 \rangle^{2-2s}}{s} \sum_k (T^b)_{ik} (T^a)_{kj} = \frac{([13] \langle 24 \rangle)^{2s} \langle 2 | p_4 | 3 \rangle^{2-2s}}{s} (T^b T^a)_{ij} \quad (3.101)$$

と、光子の例と同じく kinematics で決まる項と粒子の内部自由度 T_{ij}^a で決まる項の積になる。ここで、行列のように書いた notation を活かして最終的な結果は行列の積で書いた。 $(T^a T^b)_{ij} = (T^b T^a)_{ij}$, つまり $[T^a, T^b] = 0$ のとき、光子の例の 4 点散乱振幅に $(T^a T^b)_{ij}$ をかけることで無矛盾な散乱振幅を構成できる。一方、 $[T^a, T^b] \neq 0$ のとき、一見すると無矛盾な散乱振幅が構成できないように見える。しかし、今回はスピン 1 の零質量粒子が自己相互作用しうるので t チャネルからの留数の寄与があっても良い。したがって、 s チャネルと u チャネルの留数は $\frac{1}{t}$ の極を持っていると解釈できる。 t チャネルからの留数は

$$R_t^{+-} = \begin{array}{c} 1_i^{-s} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2_a^{+1} \end{array} \begin{array}{c} I_c^{+1} \\ | \\ I_c^{-1} \end{array} \begin{array}{c} 4_j^{+s} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3_b^{-1} \end{array}$$

$$R_s^{+-} = \begin{array}{c} 1^{-s} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2^{+2} \end{array} \begin{array}{c} +s \\ \text{---} \\ -s \end{array} \begin{array}{c} 4^{+s} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3^{-2} \end{array}, \quad R_u^{+-} = \begin{array}{c} 1^{-s} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2^{+2} \end{array} \begin{array}{c} +s \\ \text{---} \\ -s \end{array} \begin{array}{c} 4^{+s} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3^{-2} \end{array}$$

を求める。 s チャネルの留数で $s = \langle 12 \rangle [12] = \langle 34 \rangle [34] \rightarrow 0$ のうち $[12], \langle 34 \rangle \rightarrow 0$ の kinematics において

$$\begin{aligned} R_s &= g^2 \left(\frac{\langle I2 \rangle^{2s+2} \langle 21 \rangle^{2-2s}}{\langle 1I \rangle^2} \right) \left(\frac{[I3]^{2s+2} [34]^{2-2s}}{[4I]^2} \right) = g^2 \frac{\langle 12 \rangle^{2s+2} \langle 21 \rangle^{2-2s} [13]^{2s+2} [34]^{2-2s}}{\langle 12 \rangle^2 [24]^2} \\ &= g^2 (-1)^{2s} \frac{\langle 12 \rangle^2 \langle 24 \rangle^2}{\langle 24 \rangle^2 [24]^2} [13]^{2s+2} [34]^{2-2s} = g^2 (-1)^{2s} \frac{\langle 24 \rangle^4}{\langle 24 \rangle^2 [24]^2} [13]^{2s+2} [34]^{2-2s} \\ &= g^2 \frac{([13] \langle 24 \rangle)^{2s}}{u^2} \langle 2 | p_4 | 3 \rangle^{4-2s} \end{aligned} \quad (3.105)$$

となる。ここで、最初の等式で運動量保存則 $|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| + |I\rangle \langle I| = 0$ を使い、最後の等号で $u = \langle 13 \rangle [13] = \langle 24 \rangle [24]$ を用いた。続いて、 $u = \langle 13 \rangle [13] = \langle 24 \rangle [24] \rightarrow 0$ で $\langle 13 \rangle, [24] \rightarrow 0$ の kinematics での留数は

$$\begin{aligned} R_u &= g^2 \left(\frac{[13]^{2s+2} [3I]^{2-2s}}{[I1]^2} \right) \left(\frac{\langle 42 \rangle^{2s+2} \langle 2I \rangle^{2-2s}}{\langle I4 \rangle^2} \right) = g^2 \frac{[13]^{2s+2} \langle 42 \rangle^{2s+2}}{[13]^2 \langle 34 \rangle^2} [31]^{2-2s} \langle 21 \rangle^{2-2s} \\ &= g^2 \frac{[13]^2 \langle 12 \rangle^{2-2s}}{\langle 34 \rangle^2} \langle 42 \rangle^{2s+2} = g^2 \frac{[13]^2 [34]^2}{s^2} \langle 12 \rangle^{2-2s} \langle 42 \rangle^{2s+2} \\ &= g^2 \frac{([13] \langle 24 \rangle)^{2s}}{s^2} \langle 2 | -p_4 | 3 \rangle^{4-2s} \end{aligned} \quad (3.106)$$

と求まる。ここで、最初の等号で3点での運動量保存則 $|1\rangle \langle 1| + |3\rangle \langle 3| + |I\rangle \langle I| = 0$ を用いた。これだけでは、 s, t, u に関する高々1位の極を持つ4点散乱振幅を構成できないので、 t チャネルの極からの寄与もなければならぬ。 t チャネルからの寄与は

$$R_t^{+-} = \begin{array}{c} 1^{-s} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2^{+2} \end{array} \begin{array}{c} I^{+2} \\ \text{---} \\ I^{-2} \end{array} \begin{array}{c} 4^{+s} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3^{-2} \end{array}$$

高々 1 位の極を持つ 4 点 tree 散乱振幅は

$$\frac{[3|p_1 - p_4|2]^2}{(s - m^2)(u - m^2)} \quad (3.116)$$

となる。ここで、定数倍は無視し $p_1 \leftrightarrow p_4$ の対称性が見やすい式の形にした。

それでは、スピン s の有質量粒子とのコンプトン散乱に話を進めよう。 s チャネルと u チャネルからの寄与は

である。 s チャネルの留数は

$$R_s = m^{2(1-2s)} \frac{x_{12}}{x_{34}} ([\mathbf{1}p^I] \langle p_I \mathbf{4} \rangle)^{2s} = -\frac{[3|p_1|2]^2}{u - m^2} \left(\frac{[\mathbf{1}p^I] \langle p_I \mathbf{4} \rangle}{m^2} \right)^{2s} \quad (3.117)$$

となる。ここで $s = m^2$ である、つまり、内線の運動量 p が on-shell であること $\det p_{a\dot{a}} = m^2$ と各 3 点での運動量保存則を用いると

$$x_{12}|2\rangle_a = \frac{p_1|2\rangle}{m} = -\frac{(p)_{a\dot{a}}}{m} |2\rangle^{\dot{a}}, \quad (3.118)$$

$$\frac{1}{x_{34}} |3\rangle^{\dot{a}} = \frac{p_4|3\rangle}{m} = \frac{(p)^{\dot{a}a}}{m} |3\rangle_a \quad (3.119)$$

という式が成立する。線形独立な 2 成分 spinor に関する方程式が 2 本あるので、上の方程式は解けて $p_{a\dot{a}}$ は

$$\begin{aligned} p_{a\dot{a}} &= \frac{-m^2|3\rangle_a \langle 2|_{\dot{a}} + (p_1|2\rangle)_a ([3|p_4]_{\dot{a}})}{[3|p_1|2\rangle} \\ &= -\frac{m^2}{[3|p_1|2\rangle} |3\rangle_a \langle 2|_{\dot{a}} + \frac{m^2 x_{12}}{x_{34}[3|p_1|2\rangle} |2\rangle_a \langle 3|_{\dot{a}} \end{aligned} \quad (3.120)$$

と求まる。実際

$$p_{a\dot{a}} |3\rangle^{\dot{a}} = -\frac{m^2 \langle 23 \rangle}{[3|p_1|2\rangle} |3\rangle_a = m x_{34} |3\rangle_a \quad (3.121)$$

と (3.119) が、 $p_4|3\rangle \propto |3\rangle$, $p_{a\dot{b}} p^{\dot{b}b} = m^2 \delta_a^b$ に注意すると

$$p_{a\dot{a}} |2\rangle^{\dot{a}} = p_1|2\rangle \frac{[3|p_4|2\rangle}{[3|p_1|2\rangle} = -(p_1)_{a\dot{a}} |2\rangle^{\dot{a}} \quad (3.122)$$

と (3.118) が成り立つことが確認できる。これを用いると R_s の冪乗の部分が

$$\begin{aligned} \frac{[1^{I_1} p^I] \langle p_I 4^{J_1} \rangle}{m^2} &= \frac{[1^{I_1} |^a p_{a\dot{a}} | 4^{J_1}]^{\dot{a}}}{m^2} = \frac{[1^{I_1} 3] \langle 4^{J_1} 2 \rangle}{[3|p_1|2]} + \frac{\langle 2|p_1|1^{I_1} \rangle \langle 4^{J_1} | p_4 | 3 \rangle}{[3|p_1|2]} \\ &= \frac{\langle 4^{J_1} 2 \rangle [1^{I_1} 3] + \langle 1^{I_1} 2 \rangle [4^{J_1} 3]}{[3|p_1|2]} \end{aligned} \quad (3.123)$$

となる。ここで、2行目で Dirac 方程式 $\langle 1^{I_1} | p_1 = -m[1^{I_1} |, p_4 | 4^{J_1}] = | 4^{J_1} \rangle$ を用いた。よって、スピン s の有質量粒子に関するコンプトン散乱 s チャンネルの留数は

$$R_s = -\frac{[3|p_1|2]^{2-2s}}{u-m^2} (\langle 42 \rangle [13] + \langle 12 \rangle [43])^{2s} \quad (3.124)$$

と求まる。 u チャンネルの留数は

$$R_u = m^{2(1-2s)} \frac{x_{24}}{x_{13}} ([1p^I] \langle p_I 4 \rangle)^{2s} = -\frac{[3|p_1|2]^{2-2s}}{s-m^2} (\langle 42 \rangle [13] + \langle 12 \rangle [43])^{2s} \quad (3.125)$$

となるので、高々 s, t, u に関して1位の極を持つ s, u チャンネルからの無矛盾な tree 散乱振幅は

$$\frac{[3|p_1|2]^{2-2s}}{(s-m^2)(u-m^2)} (\langle 42 \rangle [13] + \langle 12 \rangle [43])^{2s} \quad (3.126)$$

と求まる。

次に、内部自由度のラベル a を持つスピン1の零質量粒子 (gluon) とのコンプトン散乱を考えてみる。スピン s の内部自由度が i, j の有質量粒子と gluon との3点振幅は、零質量の場合と同様に $(T^a)_{ij}$ を導入して

$$\begin{array}{c} 3^{J_1 \dots J_{2s}} \\ \diagdown \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \diagup \\ 1^{I_1 \dots I_{2s}} \end{array} 2_a^{-1} = (T^a)_{ij} \frac{1}{x m^{2s-1}} \langle 1^{I_1} 3^{J_1} \rangle \dots \langle 1^{I_{2s}} 3^{J_{2s}} \rangle = (T^a)_{ij} \frac{1}{x} \frac{[\mathbf{13}]^{2s}}{m^{2s-1}},$$

$$\begin{array}{c} 3^{J_1 \dots J_{2s}} \\ \diagdown \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \diagup \\ 1^{I_1 \dots I_{2s}} \end{array} 2_a^{+1} = (T^a)_{ij} \frac{x}{m^{2s-1}} [1^{I_1} 3^{J_1}] \dots [1^{I_{2s}} 3^{J_{2s}}] = (T^a)_{ij} x \frac{[\mathbf{13}]^{2s}}{m^{2s-1}}$$

であるから、 s, u チャンネルの留数 R_s, R_u は

$$R_s = \begin{array}{c} 1^{I_1, \dots, I_{2s}} \\ \diagdown \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \diagup \\ 2_a^{+1} \end{array} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ -p \end{array} \begin{array}{c} 4^{J_1, \dots, J_{2s}} \\ \diagdown \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \diagup \\ 3_b^{-1} \end{array}, \quad R_u = \begin{array}{c} 1_i \\ \diagdown \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \diagup \\ 2_a^{+1} \end{array} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ -p \end{array} \begin{array}{c} 4_j \\ \diagdown \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \diagup \\ 3_b^{-1} \end{array}$$

であり、零質量の場合と同様で光子の時に行列要素がついて

$$R_s = -\frac{[3|p_1|2]^{2-2s}}{u-m^2} (\langle 42 \rangle [13] + \langle 12 \rangle [43])^{2s} (T^a T^b)_{ij}, \quad (3.127)$$

$$R_u = -\frac{[3|p_1|2]^{2-2s}}{s-m^2} (\langle 42 \rangle [13] + \langle 12 \rangle [43])^{2s} (T^b T^a)_{ij} \quad (3.128)$$

となる。[T^a, T^b] $\neq 0$ の時 s, u チャネルの寄与のみでは無矛盾な 4 点散乱振幅を作ることができない。つまり、gluon の自己相互作用からくる t チャネルからの寄与が必要になる。 $t = \langle 23 \rangle [23] \rightarrow 0$ で $\langle 23 \rangle \rightarrow 0$ の時の留数 R_t

$$R_t = \frac{I_c^{+1} - I_c^{-1}}{I_c} \times \text{Diagram}$$

を考える。 t チャネルからの留数の寄与は

$$\begin{aligned} R_t &= (T^c)_{ij} m^{1-2s} x_{14} [\mathbf{41}]^{2s} f^{abc} \frac{[3I]^3}{[I2][23]} = f^{abc} (T^c)_{ij} \left(\frac{[\mathbf{41}]}{m} \right)^{2s} \frac{[3|p_1|I][I3]^2}{[I2][23]} \\ &= f^{abc} (T^c)_{ij} \left(\frac{[\mathbf{41}]}{m} \right)^{2s} [3|p_1|2] \frac{[I3]}{[I2]} \end{aligned} \quad (3.129)$$

と表せる。ここで x 因子は

$$x_{14}|I\rangle = \frac{p_1}{m} |I\rangle \quad (3.130)$$

と定義されている。

$$\frac{[I3]}{[I2]} = \frac{[I3]^2}{[I3][I2]} = \frac{[3|p_1|I][I3]}{[3|p_1|I][I2]} = \frac{[3|p_1|2][23]}{[3|p_1|3][32]} = \frac{[3|p_1|2]}{u-m^2} \quad (3.131)$$

であるから

$$R_t = f^{abc} (T^c)_{ij} \frac{[3|p_1|2]^2}{u-m^2} \left(\frac{[\mathbf{41}]}{m} \right)^{2s} \quad (3.132)$$

と計算できる。これらの留数を再現する 4 点 tree 散乱振幅は

$$[3|p_1|2]^{2-2s} (\langle 42 \rangle [13] + \langle 12 \rangle [43])^{2s} \frac{1}{t} \left[\frac{(T^a T^b)_{ij}}{s-m^2} + \frac{(T^b T^a)_{ij}}{u-m^2} \right] \quad (3.133)$$

となる。実際、 $t = 0$ で $\langle 23 \rangle = 0$ の kinematics の時、Schouten 恒等式を用いれば

$$\begin{aligned} \langle 4^I 2 \rangle [1^J 3] + \langle 1^J 2 \rangle [4^I 3] &= [1^J 3] [4^I | \frac{p_4}{m} | 2 \rangle + [4^I 3] [1^J | \frac{p_1}{m} | 2 \rangle \\ &= [31^J] [4^I | \frac{p_1}{m} | 2 \rangle + [4^I 3] [1^J | \frac{p_1}{m} | 2 \rangle \\ &= [4^I 1^J] [3 | \frac{p_1}{m} | 2 \rangle \end{aligned} \quad (3.134)$$

なので、 t チャンネルの留数も再現していることが確認できる。この4点散乱振幅の表式を見ると零質量の場合と同様に $s > 1$ で s, t, u 以外の極が生じる。現実にはチャージを持った高スピンの粒子は存在しており散乱実験の対象となっているが、これは低エネルギー有効理論の話なので上の議論の適用外である。ここで言えることは、gluon と結合するスピンの $\frac{3}{2}$ 以上の有質量粒子は素粒子ではなく複合粒子であるということである。

では次に、零質量スピン2の粒子(重力子)とスピン s の有質量粒子とのコンプトン散乱を考えよう。スピン s 有質量粒子と重力子との3点 minimal 結合は

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 3^{J_1 \dots J_{2s}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1^{I_1 \dots I_{2s}} \end{array} 2^{-2} &= \frac{1}{x^2 m^{2s-1}} \langle 1^{I_1} 3^{J_1} \dots \langle I_{2s} \rangle 3^{J_{2s}} \rangle = \frac{1}{x^2} \frac{\langle \mathbf{13} \rangle^{2s}}{m^{2s-1}}, \\ \begin{array}{c} 3^{J_1 \dots J_{2s}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1^{I_1 \dots I_{2s}} \end{array} 2^{+2} &= \frac{x^2}{m^{2s-1}} [1^{I_1} 3^{J_1}] \dots [I_{2s}] 3^{J_{2s}} = x^2 \frac{[\mathbf{13}]^{2s}}{m^{2s-1}} \end{aligned}$$

と x 因子の冪が光子の場合より2倍になる。 s, u チャンネルからの留数 R_s, R_u

$$R_s = \begin{array}{c} 1^{I_1, \dots, I_{2s}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2^{+2} \end{array} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ -p \end{array} \begin{array}{c} 4^{J_1, \dots, J_{2s}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3^{-2} \end{array}, \quad R_u = \begin{array}{c} 1^{I_1, \dots, I_{2s}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2^{+2} \end{array} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ -p \end{array} \begin{array}{c} 4^{J_1, \dots, J_{2s}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3^{-2} \end{array}$$

を計算する。 x 因子の定義と内線の運動量が on-shell であるという条件を用いれば、光子の時と同様に

$$\begin{aligned} R_s &= m^{2(1-2s)} \frac{x_{12}^2}{x_{34}^2} ([\mathbf{1} p^I] \langle p_I \mathbf{4} \rangle)^{2s} = \frac{[3|p_1|2\rangle^4}{m^2 \langle 23 \rangle^2 [23]^2} \left(\frac{[\mathbf{1} p^I] \langle p_I \mathbf{4} \rangle}{m^2} \right)^{2s} \\ &= -\frac{[3|p_1|2\rangle^{4-2s}}{m^2 t(u-m^2)} (\langle \mathbf{42} \rangle [\mathbf{13}] + \langle \mathbf{12} \rangle [\mathbf{43}])^{2s} \end{aligned} \quad (3.135)$$

recursion 公式である。この BCFW は Britto, Cachazo, Feng, と Witten の 4 人の名から取られており、要点としては tree 散乱振幅の極は内線が on-shell になるときにのみ現れることである。ここでは、外線が全て零質量である状況を考えていく。

■複素変数で運動量をシフトする一般論 それでは n 点の on-shell 散乱振幅 $A_n(p_1, \dots, p_n)$ を考えよう。外線の運動量を $p_i^\mu (i = 1, \dots, n)$ とおいた。全運動量保存則 $\sum_{i=1}^n p_i^\mu = 0$ と外線が on-shell 条件 $p_i^2 = 0$ を満たしている。ここで、 n 個の複素 4 元ベクトル $r_i^\mu (i = 1, \dots, n)$ を導入しよう。 $r_i (i = 1, \dots, n)$ に以下の 3 条件を課す。一つ目は運動量保存則のような

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n r_i = 0 \quad (3.139)$$

という条件である。二つ目は任意の $i, j = 1, \dots, n$ について

$$(ii) \quad r_i \cdot r_j = 0 \quad (3.140)$$

であり、特に r_i はヌルである。最後に 3 つ目の条件は各 i 番目の運動量 p_i に対して

$$(iii) \quad p_i \cdot r_i = 0 \quad (3.141)$$

であり、(iii) 式に関しては i について和をとっていない。

では、複素変数 $z \in \mathbb{C}$ を導入し外線の運動量 p_i^μ をシフトしよう。シフトした後の運動量を q_i^μ とすると

$$q_i^\mu = p_i^\mu + z r_i^\mu \quad (3.142)$$

のように遷移させる。すると上で r_i で課した条件らのおかげで、条件 (i) により q_i による運動量保存則

$$\sum_{i=1}^n q_i^\mu = \sum_{i=1}^n (p_i^\mu + r_i^\mu) = 0 \quad (3.143)$$

が成り立ち条件 (ii),(iii) から

$$q_i^2 = (p_i + r_i)^2 = p_i^2 + 2p_i \cdot r_i + r_i^2 = 0 \quad (3.144)$$

とシフトした後の運動量 q_i も on-shell 条件を満たすことがわかる。ここで、tree 散乱振幅の内線運動量になりうる P_I を考えてみる。部分集合 $I \subset \{1, \dots, n\}$ の要素数 $\#I$ は $2 \leq \#I \leq n-2$ であり、 $P_I = \sum_{i \in I} p_i$ と定義した。同様に $Q_I = \sum_{i \in I} q_i, R_I = \sum_{i \in I} r_i$ と定義すると、

$$Q_I^2 = (P_I + zR_I)^2 = P_I^2 + 2z P_I \cdot R_I + R_I^2 = P_I^2 + 2z P_I \cdot R_I \quad (3.145)$$

となる。ここで重要なのが条件 (ii),(iii) のおかげで $R_I^2 = 0$ となり Q_I^2 が z の一次式になることである。つまり、シフトする前の外線運動量 p_i と導入した複素運動量 r_i から定義される定

数 z_I を用いて

$$Q_I^2 = -\frac{P_I^2}{z_I}(z - z_I), \quad z_I = -\frac{P_I^2}{2P_I \cdot R_I} \quad (3.146)$$

とかける。シフトした後の運動量 q_i も運動量保存則と on-shell 条件を満たしていたので、 z の関数として外線を q_i にした n 点 on-shell 散乱振幅

$$\tilde{A}(z) := A(q_1, \dots, q_n) = A(p_1 + zr_1, \dots, p_n + zr_n) \quad (3.147)$$

を考えてみよう。定義から $\tilde{A}(z=0) = A(p_1, \dots, p_n)$ であり、 $\tilde{A}(z)$ は z について解析的である。

ここで、 $\tilde{A}_n(z)$ を tree 散乱振幅に限定しよう。Tree に限定すると $\tilde{A}_n(z)$ は分岐を持つ ($\log z, \sqrt{z}$ のような) 関数形ではない。相互作用が局所的であると仮定すると、 $\tilde{A}_n(z)$ は内線が on-shell になる点で z について高々 1 位の極を持つ。つまり、内線の運動量が $Q_I^2 = 0$ となる、 $z = z_I$ となる点で $\tilde{A}_n(z)$ は 1 位の極を持つ。ここで Cauchy の定理を思い出してみよう。 $z = 0$ 周りの十分小さい閉経路 $|z| = \epsilon$ で積分すると

$$A_n(p_1, \dots, p_n) = \tilde{A}_n(0) = \oint_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\tilde{A}_n(z)}{z} \quad (3.148)$$

となる。ここで、上の周回積分の見方を変えて $|z| > \epsilon$ での留数を拾っていると考えると

$$A_n = - \sum_{z_I} \text{Res}_{z=z_I} \frac{\tilde{A}_n(z)}{z} + B_n \quad (3.149)$$

となる。ここで無限遠点 $z = \infty$ での留数を B_n とおいた。無限遠点での振る舞いを見るために $z = \frac{1}{\omega}$ と変数変換すると

$$\frac{dz}{z} = -\frac{d\omega}{\omega} \quad (3.150)$$

であるから無限遠点の留数には負符号はつかず、 B_n は $\tilde{A}_n(z)$ の $z = \infty$ 周りの展開で $\mathcal{O}(z^0)$ の定数項であることに注意したい。このように Cauchy の定理を変形した良い点は、 $z = z_I$ において内線が on-shell となっており散乱振幅が因数分解できる点である。つまり、 $z = z_I$ における 1 位の極の留数は

$$\text{Res}_{z=z_I} \frac{\tilde{A}_n(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow z_I} (z - z_I) \frac{A_L(z)A_R(z)}{zQ_I^2} = -\frac{A_L(z_I)A_R(z_I)}{P_I^2} \quad (3.151)$$

であり、 P_I でラベルされる内線をカットし左右に分かれた部分ダイアグラム A_L, A_R を z_I だけシフトした振幅の積をシフト前の内線の伝播関数をかけたものになっている。Feynmann 図を用いて書けば

$$\text{Res}_{z=z_I} \frac{\tilde{A}_n(z)}{z} =$$

のようになり n 点の tree 散乱振幅の計算が n より小さい外線数の tree 散乱振幅の計算に帰着できたことが分かる。一方、 B_n については再帰的な一般論は知られていないが、pure Yang-Mills 理論や平坦時空からの線形摂動での Einstein 重力理論では $B_n = 0$, つまり、 $z \rightarrow \infty$ で $\tilde{A}_n(z) \rightarrow 0$ となるようなシフト方法を構成できる [16]。以上から、 $B_n = 0$ であることを仮定すると tree な n 点 on-shell 散乱振幅 A_n が

$$A_n(p_1, \dots, p_n) = \sum_I \frac{A_L(z_I) A_R(z_I)}{P_I^2} \quad (3.152)$$

のように外線数が n より小さい散乱振幅との再帰的な関係式を構成できことがわかった。この構成方法は Feynmann ルールで現れる偏光ベクトルのようなゲージ依存な量を用いていないのでゲージ不変な方法であり、時空の次元にもよらないという利点を持つ。

■BCFW recursion 公式 上で導入した複素ヌル 4 元ベクトル r_i を具体的に与えよう。ここでは、 n 個中 $n-2$ 個の外線運動量はシフトせず、外線 p_i, p_j の 2 本をシフトする状況を考える。複素シフトした後の運動量をハットをつけて記述することにしよう。BCFW シフトでは

$$|\hat{i}\rangle = |i\rangle + z|j\rangle, \quad |\hat{i}\rangle = |i\rangle, \quad (3.153)$$

$$|\hat{j}\rangle = |j\rangle, \quad |\hat{j}\rangle = |j\rangle - z|i\rangle \quad (3.154)$$

とシフトする。これは $[i, j]$ -シフトと呼ばれる。上の一般論での記法と比較してみると

$$(\hat{p}_i)_{a\dot{a}} = -|\hat{i}\rangle_a \langle \hat{i}|_{\dot{a}} = -|i\rangle_a \langle i|_{\dot{a}} - z|j\rangle_a \langle i|_{\dot{a}} = (p_i)_{a\dot{a}} - z|j\rangle_a \langle i|_{\dot{a}}, \quad (3.155)$$

$$(\hat{p}_j)_{a\dot{a}} = -|\hat{j}\rangle_a \langle \hat{j}|_{\dot{a}} = -|j\rangle_a \langle j|_{\dot{a}} + z|j\rangle_a \langle i|_{\dot{a}} = (p_j)_{a\dot{a}} + z|j\rangle_a \langle i|_{\dot{a}} \quad (3.156)$$

という計算から、 $(r_i)_{a\dot{a}} = -(r_j)_{a\dot{a}} = -|j\rangle_a \langle i|_{\dot{a}}$ というシフトであることがわかる。 $r_i = -r_j$ から条件 (i) を満たすことが確認でき、Fierz 恒等式を用いれば

$$r_i^2 = \langle i|\bar{\sigma}^\mu|j\rangle \langle i|\bar{\sigma}_\mu|j\rangle = 2\langle ii\rangle [jj] = 0 \quad (3.157)$$

から条件 (ii) を満たすことが確認でき、

$$2p_i \cdot r_i = [i|r_i|i\rangle = -[ij]\langle ii\rangle = 0, \quad (3.158)$$

$$2p_j \cdot r_j = [j|r_j|j\rangle = [jj]\langle ij\rangle = 0 \quad (3.159)$$

から条件 (iii) を満たすことが確認できる。

この便利さを具体例で体験してみよう。具体例として pure Yang-Mills 理論における MHV- n 点 tree 散乱振幅の Parke-Taylor 公式を導出する。その公式は n 本の外線中 $n-2$ 本

がヘリシティ -1 で 2 本がヘリシティ $+1$ の n 点散乱振幅 $A_n(1^+, 2^+, 3^-, \dots, n^-)$ に関して

$$A_n(1^+, 2^+, 3^-, \dots, n^-) = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (3.160)$$

というものである。ここで MHV というのは Maximally helicity violating の略である。この言葉の由来は、tree 散乱振幅でヘリシティが全て同じか、一つだけ異なる振幅は消えることに由来する。つまり

$$A_n^{\text{tree}}(1^-, 2^-, \dots, n^-) = A_n^{\text{tree}}(1^+, 2^-, \dots, n^-) = 0 \quad (3.161)$$

であり、符号が反転した tree 散乱振幅に関しても同様である。これは、pure Yang-Mills 理論の相互作用項 $AA\partial A + A^4$ の次元解析と外線の偏光ベクトルのレファレンス spinor をうまく選ぶことで示せたことを思い出そう [1]。外線が全て outgoing の notation から in-out 形式で解釈すると全てヘリシティが同じ振幅は $1^+ 2^+ \rightarrow 3^-, \dots, n^-$ のように初期状態と終状態でヘリシティが破れている反応であり $A_n(1^-, 2^-, \dots, n^-)$ に対応した tree では消える散乱振幅である。また、 $A_n(1^-, 2^-, 3^+, 4^-, \dots, n^-)$ に対応したヘリシティが次に最大に破れた $1^+, 2^+ \rightarrow 3^+, 4^-, \dots, n^-$ 反応も tree では消える。tree で消えない最大にヘリシティが破れた反応は $1^+, 2^+ \rightarrow 3^+, 4^+, 5^-, \dots, n^-$ であり、これに対応する $A_n(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^-, \dots, n^-)$ が Maximally helicity violating (MHV) 振幅となる。MHV の次にヘリシティが破れた $A_n(1^+, 2^+, 3^+, 4^-, \dots, n^-)$ は Next-to-MHV (NMHV) 振幅と呼ばれる。一般に N^k MHV 振幅は $k+2$ 本の正のヘリシティを持つ外線と $n-k-2$ 本の負のヘリシティを持つ外線からなる振幅を指す。この議論はヘリシティの符号を反転した振幅について成り立つので、それらの振幅は anti-MHV 振幅などと呼ぶ。

それでは、BCFW recursion 公式を用いて Parke-Taylor 公式を示そう。外線数が $n=3$ の時は零質量粒子の little group に関する議論から

$$A_n(1^+, 2^+, 3^-) = \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \quad (3.162)$$

と公式が成立する。Pure Yang-Mills 理論の時 $z = \infty$ での留数 B_n の寄与はないので再帰的な議論が可能となる。そこで、外線数が $n \geq 4$ 未満の MHV 散乱振幅について Parke-Taylor 公式が成り立つと仮定し、外線が n 本の MHV 振幅を考えてみよう。 $[1, 2]$ -シフトをとると漸化式はダイアグラムを用いて書くと

$$A_n(1^+, 2^+, 3^-, \dots, n^-) = \sum_{k=4}^n \hat{1}^+ \quad \begin{array}{c} \text{---} \hat{1}^+ \\ \text{---} n^- \\ \vdots \\ \text{---} k^- \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} P_I \\ \text{---} \text{---} P_R \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \hat{2}^+ \\ \text{---} 3^- \\ \vdots \\ \text{---} (k-1)^- \end{array}$$

のようになる。ここで、シフトした運動量にはハット $\hat{}$ をつけて区別した。また、シフトした外線がそれぞれ左と右にない場合 z に関する極を内線が持ち得ないため $\hat{1}$ は左、 $\hat{2}$ は右にある

と仮定して良い。また、運動量 P_I の内線の端点の符号は各部分ダイアグラムでのヘリシティを表しており、和をとっている。左の部分ダイアグラムにおいて P_I のヘリシティが負の時を考えると左のダイアグラムは外線数が $n - k + 3$ 本で一つだけヘリシティが異なる散乱振幅なので $n - k + 3 = 3$ 以外で消える。同様に左の部分ダイアグラムにおいて P_I のヘリシティが負の時は、右の部分ダイアグラムが外線 $k - 1$ 本で一つだけヘリシティが異なる散乱振幅となるので $k = 4$ 以外で消える。つまり、上の k に関する和は $4 < k < n$ の項は寄与しない。したがって、漸化式は簡単になり

$$A_n(1^+, 2^+, 3^-, \dots, n^-) =$$

$$+$$

のように二項の和になる。初項の左の部分ダイアグラムに着目してみると、この3点振幅は $P_I = P_{1n} = p_1 + p_n$ とすると

$$\frac{[\hat{P}_{1n}n]^3}{[n\hat{1}][\hat{1}\hat{P}_{1n}]} \quad (3.163)$$

に比例する。今 \hat{P}_{in} は on-shell になるように $z = z_{1n}$ となっているから

$$0 = (\hat{p}_1 + p_n)^2 = 2\hat{p}_1 \cdot p_n = [\hat{1}n] \langle n1 \rangle \quad (3.164)$$

という計算から $[\hat{1}n] = 0$ となり分母が0となる。一方、分子も

$$|\hat{P}_{1n}\rangle [\hat{P}_{1n}n] = -\hat{P}_{1n}|n\rangle = -\hat{p}_1|n\rangle = |1\rangle [\hat{1}n] = 0 \quad (3.165)$$

と計算でき $|\hat{P}_{1n}\rangle$ は三角 spinor として0ではないので $[\hat{P}_{1n}n]$ も $[\hat{1}n]$ と同程度に0となっている。同様に

$$|\hat{P}_{1n}\rangle [\hat{P}_{1n}\hat{1}] = -\hat{P}_{1n}|\hat{1}\rangle = -p_n|n\rangle = |n\rangle [n\hat{1}] = 0 \quad (3.166)$$

と分母の $[\hat{1}\hat{P}_{1n}]$ も $[\hat{1}n]$ と同程度に0となる。分子は3乗、分子は2乗であるから全体として初項に含まれる左の部分ダイアグラムの寄与は0となる。よって、BCFW recursion 公式から

$$A_n(1^+, 2^+, 3^-, \dots, n^-) = \frac{A_3(\hat{2}^+, 3^-, -\hat{P}_{23}^-)A_{n-1}(\hat{1}^+, \hat{P}_{23}^+, 4^-, \dots, n^-)}{P_{23}^2} \quad (3.167)$$

という漸化式が成立する。 p_2 に関しては三角 spinor のみがシフトされているため、初項のような議論は成立せず 3 点部分ダイアグラムは消えない。外線数 $n - 1$ 本の部分ダイアグラムに関して Parke-Taylor 公式を仮定して計算すると

$$\frac{A_3(\hat{2}^+, 3^-, -\hat{P}_{23}^-) A_{n-1}(\hat{1}^+, \hat{P}_{23}^+, 4^-, \dots, n^-)}{P_{23}^2} = \frac{[\hat{P}_{23}3]^3}{[3\hat{2}][\hat{2}\hat{P}_{23}]} \frac{1}{\langle 23 \rangle [32]} \frac{\langle \hat{P}_{23}\hat{1} \rangle^3}{\langle 4\hat{P}_{23} \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (3.168)$$

となる。 $[1, 2]$ -シフトなので $|\hat{1}\rangle = |1\rangle, |\hat{2}\rangle = |2\rangle, \langle \hat{1}\hat{2} \rangle = \langle 12 \rangle = \langle 12 \rangle$ であることに注意して分子と分母を計算する。分子は

$$[\hat{P}_{23}3]^3 \langle \hat{P}_{23}\hat{1} \rangle^3 = [3|\hat{P}_{23}|1\rangle^3 = [3|\hat{p}_2|1\rangle^3 = [32]^3 \langle \hat{2}1 \rangle^3 = [32]^3 \langle 21 \rangle^3 \quad (3.169)$$

であり、分母は

$$[\hat{2}\hat{P}_{23}] \langle 4\hat{P}_{23} \rangle = [2|\hat{P}_{23}|4\rangle = [23] \langle 34 \rangle \quad (3.170)$$

となる。したがって、

$$A_n(1^+, 2^+, \dots, n^-) = \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 34 \rangle} \frac{1}{\langle 23 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle n1 \rangle} = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (3.171)$$

と計算でき、外線数が n の時にも Parke-Taylor 公式が成立することが示された。この計算は spinor-helicity formalism に慣れていないと煩雑に見えるが Feynmann ダイアグラムを素朴に足し合わせて計算するよりもずっと見通しがよくなっている。

第 4 章

場の量子論を用いたテンプレート波形の計算方法 (KMOC formalism)

ブラックホール 2 体が互いに十分な距離を保ちながら重力相互作用している inspiral 段階で放出される重力波波形を計算したい。Inspiral 段階において Einstein 方程式を平坦時空からの摂動計量に関して展開し計算するよりも、散乱振幅を用いて摂動展開した方が前章で説明したような on-shell 散乱振幅技術を利用することができるようになり系統的に計算できるようになった。KMOC の定式化は、古典散乱現象に伴う物理量を場の量子論の散乱振幅から計算する手法の一つである。KMOC は提唱者 3 人の名前、David A. Kosower, Ben Maybee, Donal O'Connell にちなんでいる。この定式化を利用すると、重力波の波形を摂動的に計算することができる。重力波の波形計算には、一般相対論を用いた解析的な摂動論、数値相対論を用いた計算、1 体の有効作用を用いた計算、worldline 定式化とさまざまある。KMOC の定式化を用いた計算では今までの計算方法に比べて楽に波形計算ができることがある。このような計算が簡単になる例をあとで扱う。以下の説明は通称 KMOC 論文 [17] と、その続きの論文 [18] の内容も含んだ KMOC formalism である。

4.1 散乱振幅における \hbar の戻し方

KMOC formalism では量子力学から古典量を計算する時に $\hbar \rightarrow 0$ の極限を取る。この極限を取るために散乱振幅の \hbar を明示的にする必要がある。これは機械的にでき量子電磁気学の場合は e を e/\hbar に、重力では逆質量 $\kappa = \sqrt{32\pi G_N}$ を $\kappa = \sqrt{32\pi G_N/\hbar}$ にすれば良い。ここで、 e も κ も結合定数であり、 e は素電荷、 G_N は 4 次元時空のニュートン定数を表している。

4.2 古典極限を取るための波動関数の条件

量子力学的な期待値を古典極限を取ることで、古典散乱の時の物理量を計算するので、粒子を記述する波動関数は詳細に決める必要はないが、一定の条件が必要となる。

4.2.1 有質量粒子

有質量の場合、その条件は Goldilocks 条件と呼ばれる。この Goldilocks はイギリスの童話に登場する少女の名前に由来する。彼女が熱すぎず冷めすぎてもいない粥を提供したという内容から転じて、Goldilocks は中間的で適度な状況を表す用語となった。式でかくと

$$l_c \ll l_w \ll l_s \quad (4.1)$$

である。ここで、 $l_c = \hbar/m$ は (簡約) コンプトン波長、 l_w は位置表示波動関数の波束の広がり、 l_s は二体散乱時時の散乱長さである。この Goldilocks 条件は、波束が量子効果を無視できるほどには十分広がっているが、他粒子と重なるほど広がっていない条件と解釈できる。具体的な波動関数の形を見るために、非相対論的な場合をまず考えて見る。非相対論的な場合、波動関数は運動量表示で

$$\tilde{\phi}(p) \propto \left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2m^2 l_c^2 / l_w^2} \right) \quad (4.2)$$

と書けた。これは座標空間の原点で静止している粒子を表す波動関数で、これを位置表示にフーリエ変換すれば

$$\phi(x) \propto \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2l_w^2}\right) \quad (4.3)$$

となり、確かに l_w が波束の広がりを表していることがわかる。相対論的な場合の波動関数の例としては

$$\tilde{\phi}(p) \propto \exp\left(-\frac{p \cdot u}{m\xi}\right) \quad (4.4)$$

がある。ここで、 $\xi = (l_c/l_w)^2$ とおき、4 元ベクトル u は古典的な粒子の速度である。古典極限をとることは、 ξ の言葉では $\xi \rightarrow 0$ とすることである。この具体的な相対論的波動関数が非相対論的な極限で上のガウス関数の波束と一致することを具体例を用いて説明する。例えば、原点で静止している $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ を考える。4 元運動量 p^μ は非相対論的極限で $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) \simeq (m + \mathbf{p}^2/2m, \mathbf{p})$ と近似され

$$p \cdot u = -p^0 u^0 = -m - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (4.5)$$

となる。これは確かに式 (4.2) と一致している。古典極限をとれる波動関数 $\tilde{\phi}(p)$ は、式 (4.4) だけではなく、 $\beta, \beta' > 0$ として以下の条件を満たす波動関数ならば良い:

$$\int d\Phi(p) \left| \tilde{\phi}(p) \right|^2 = 1, \quad (4.6)$$

$$\langle p^\mu \rangle = \int d\Phi(p) p^\mu \left| \tilde{\phi}(p) \right|^2 = m u^\mu + \mathcal{O}(\xi^\beta), \quad (4.7)$$

$$\sigma(p) := \langle p^2 \rangle - \langle p^\mu \rangle^2 = \mathcal{O}(\xi^{\beta'}). \quad (4.8)$$

それぞれ、波動関数の規格化条件、運動量の期待値と古典運動量との一致条件、古典極限を取ると運動量の分散はゼロとなる条件である。

4.2.2 零質量粒子

零質量粒子の場合は、有質量の時の条件である Goldilocks 条件が成り立たない。なぜなら、素朴に $m \rightarrow 0$ の極限をとるとコンプトン波長が発散してしまうからである。零質量粒子の場合、古典極限をとれる量子状態としてコヒーレント状態を選ぶ。コヒーレント状態 $|\alpha_\eta\rangle$ とは消滅演算子 $a_\eta(k)$ の固有状態のことで、コヒーレント状態演算子 $\mathbb{C}_{\alpha,\eta}$ を

$$\mathbb{C}_{\alpha,\eta} := N_\alpha \exp \left[\int d\Phi(k) \alpha(k) a_\eta^\dagger(k) \right] \quad (4.9)$$

と定義すると $|\alpha_\eta\rangle := \mathbb{C}_{\alpha,\eta} |0\rangle$ と書ける。ここで、 N_α は規格化定数、 η はヘリシティ、 $\alpha(k)$ は複素関数である。規格化定数は

$$1 = \langle \alpha_\eta | \alpha_\eta \rangle = N_\alpha^2 \langle 0 | \exp \left[\int d\Phi(k) \alpha^*(k) a_\eta(k) \right] \exp \left[\int d\Phi(k) \alpha(k) a_\eta^\dagger(k) \right] |0\rangle \quad (4.10)$$

を用いて計算できる。指数関数の積は BCH 公式

$$e^A e^B = \exp \left[A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} [A - B, [A, B]] + \dots \right] \quad (4.11)$$

を用いて計算すると良い。今は $[a_\eta(k), a_{\eta'}^\dagger(k')] = \delta_{\eta\eta'} \delta_\Phi(k - k')$ であり、

$$A = \int d\Phi(k) \alpha^*(k) a_\eta(k), \quad B = \int d\Phi(k) \alpha(k) a_\eta^\dagger(k), \quad (4.12)$$

$$[A, B] = \int d\Phi(k) d\Phi(k') \alpha^*(k) \alpha(k') [a_\eta(k), a_\eta^\dagger(k')] = \int d\Phi(k) |\alpha(k)|^2, \quad (4.13)$$

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \quad (4.14)$$

なので

$$1 = N_\alpha^2 \langle 0 | e^A e^B |0\rangle = N_\alpha^2 \exp \left[\int d\Phi(k) |\alpha(k)|^2 \right] \langle 0 | e^B e^A |0\rangle, \quad (4.15)$$

$A|0\rangle = \langle 0|B = 0$ より

$$N_\alpha = \exp \left[-\frac{1}{2} \int d\Phi(k) |\alpha(k)|^2 \right] \quad (4.16)$$

とわかる。このように定義したコヒーレント状態は

$$\langle \alpha_\eta | a_{\eta'}^\dagger(k) = \delta_{\eta\eta'} \langle \alpha_\eta | \alpha^*(k), \quad a_{\eta'}(k) | \alpha_\eta \rangle = \delta_{\eta\eta'} \alpha(k) | \alpha_\eta \rangle \quad (4.17)$$

のように、確かに消滅演算子の固有状態になっている。この性質を使うと、実際にコヒーレント状態が古典波動に対応していることがわかる。具体例として、光子場 \mathbb{A}^μ を考えてみる。自由な光子場は

$$\mathbb{A}^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \sum_{\eta=\pm} \int d\Phi(k) \left[a_\eta(k) \varepsilon_\eta^{\mu*}(k) e^{ik \cdot x/\hbar} + h.c. \right] \quad (4.18)$$

であった。ここで、 ε^μ は偏光ベクトルであり、 $k \cdot \varepsilon_\eta(k) = 0$, $\varepsilon_\eta^{\mu*}(k) = \varepsilon_{-\eta}^\mu(k)$, $\varepsilon_\eta(k) \cdot \varepsilon_{\eta'}^*(k) = \delta_{\eta\eta'}$ だった。また、 ε_\pm, k で空間成分の完全系を張っていた:

$$\sum_{\eta} \varepsilon_\eta^i \varepsilon_\eta^j + \frac{k^i k^j}{(k^0)^2} = \delta^{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.19)$$

光子場のコヒーレント状態 $|\alpha_+\rangle$ における期待値 $\langle \mathbb{A}^\mu \rangle$ は、性質 (4.17) から

$$\langle \mathbb{A}^\mu(x) \rangle = \langle \alpha_+ | \mathbb{A}^\mu(x) | \alpha_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int d\Phi(k) \left[\alpha(k) \varepsilon_+^{\mu*}(k) e^{ik \cdot x/\hbar} + c.c. \right] \quad (4.20)$$

となる。古典極限を取るために、運動量から波数に積分変数を置き換える。 $d\Phi(k) = \hbar^2 d\Phi(\bar{k})$ なので

$$\langle \mathbb{A}^\mu(x) \rangle = \langle \alpha_+ | \mathbb{A}^\mu(x) | \alpha_+ \rangle = \int d\Phi(\bar{k}) \left[\hbar^{3/2} \alpha(k) \varepsilon_+^{\mu*}(k) e^{i\bar{k} \cdot x} + c.c. \right] \quad (4.21)$$

である。したがって、 $\bar{\alpha}(\bar{k}) := \hbar^{3/2} \alpha(k)$ とすると、これが古典電磁場の振幅と位相を表すことがわかる。つまり、 $\alpha(k)$ は古典極限を取ると無限大に発散する。これを、物理量に対応させて解釈する。初めに、光子数 $\langle \mathbb{N}_\gamma \rangle$ を考えてみる。光子数は波動の言葉で言うと強度に対応する。実際、光子数は

$$\langle \mathbb{N}_\gamma \rangle = \langle \alpha_+ | \sum_{\eta} \int d\Phi(k) a_\eta^\dagger(k) a_\eta(k) | \alpha_+ \rangle = \int d\Phi(k) |\alpha(k)|^2 = \frac{1}{\hbar} \int d\Phi(\bar{k}) |\bar{\alpha}(\bar{k})|^2 \quad (4.22)$$

と $\hbar^{-1} \times (\hbar$ によらない係数) となっているので、コヒーレント状態の光子数期待値の古典極限をとると発散する。つまり、コヒーレント状態の光子場は、光子数の揺らぎが見えない程度に強度が十分大きい古典電磁場を表している。次に運動量 $\langle \mathbb{K}^\mu \rangle$ を考えると

$$\langle \mathbb{K}^\mu \rangle = \langle \alpha_+ | \sum_{\eta} \int d\Phi(k) k^\mu a_\eta^\dagger(k) a_\eta(k) | \alpha_+ \rangle = \int d\Phi(k) k^\mu |\alpha(k)|^2 = \int d\Phi(\bar{k}) \bar{k}^\mu |\bar{\alpha}(\bar{k})|^2 \quad (4.23)$$

のように古典極限をとった値は収束し古典電磁気の表式と一致する。

コヒーレント状態をとると、古典物理量に備わっていて欲しい因子化の条件も自動的に満たす。例えば、光子場について

$$\begin{aligned} \langle \alpha_+ | \mathbb{A}^\mu(x) \mathbb{A}^\nu(y) | \alpha_+ \rangle &= \langle \alpha_+ | \mathbb{A}^\mu(x) | \alpha_+ \rangle \langle \alpha_+ | \mathbb{A}^\nu(y) | \alpha_+ \rangle \\ &+ \hbar \int d\Phi(\bar{k}) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\bar{k}^\mu q^\nu + \bar{k}^\nu q^\mu}{\bar{k} \cdot q} \right] e^{i\bar{k} \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

となるので、古典極限をとると二つの位置での電磁場の値はそれぞれの位置における値の積になっていることがわかる。つまり、古典極限を取ることで二つの位置のエンタングルメントは自然と解消される。ここで、 q^μ はヌルベクトルで $\varepsilon_\eta(k) \cdot q = 0$ を満たし、

$$\sum_\eta \varepsilon_\eta^\mu \varepsilon_\eta^{\nu*} = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu}{k \cdot q} \quad (4.25)$$

のように、偏光ベクトルと運動量と共にミンコフスキー時空の基底をはる。

4.3 2体散乱時の物理量

2体散乱時に KMOC formalism での古典物理量の計算方法を与える。問題設定としては、古典理論における点粒子同士の散乱や粒子に光を照射することを考えている。上の古典的な問題設定で計算したい物理量を量子力学の古典極限を取ることで計算したい。この時初期状態に Goldilocks 条件を満たす波束の1粒子状態やコヒーレント状態を用いる。2体問題に関して、ここでは簡単のため粒子の自転(スピン)を考えないことにしスカラー粒子を用いて記述する。粒子の自転に関しては後で記述方法を述べる。有質量同士の散乱では、初期状態 $|\psi\rangle$ は衝突係数を b^μ とすると

$$|\psi\rangle = \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) e^{-ip_2 \cdot b/\hbar} |p_1, p_2\rangle \quad (4.26)$$

と選べば良い。ここで、 $\phi_1(p_1), \phi_2(p_2)$ はそれぞれ粒子1,2の波束である。この章では運動量表示の波動関数しか扱わないので、運動量表示であることを表す \sim は省略する。有質量粒子と零質量粒子の2体散乱の初期状態 $|\psi_w\rangle$ は

$$|\psi_w\rangle = \int d\Phi(p) \phi(p) e^{-ip_1 \cdot b/\hbar} |p, \alpha_\eta\rangle \quad (4.27)$$

となる。上の b^μ は衝突係数である。ここで、 $|p_1, p_2\rangle = a_1^\dagger(p_1) a_2^\dagger(p_2) |0\rangle, |p, \alpha_\eta\rangle = a^\dagger(p) C_{\alpha, \eta} |0\rangle$ である。

4.3.1 力積

有質量同士の散乱で粒子1に働く力積 Δp_1 を計算してみよう。散乱に伴う加速度運動で生じる放射光や放射重力波を無視できる程度に低次の結合定数 (e や κ) において、 $-\Delta p_1$ が粒子

2 に働く力積となる。力積は、無限の未来における粒子の運動量から無限の過去における粒子の運動量を引いたものであるから

$$\langle \Delta p_1^\mu \rangle = \langle \psi | S^\dagger \mathbb{P}_1^\mu S | \psi \rangle - \langle \psi | \mathbb{P}_1^\mu | \psi \rangle \quad (4.28)$$

を計算すれば良い。ここで、 \mathbb{P}_1 は粒子 1 の運動量演算子で S は散乱行列である。上の期待値が古典極限を取ると古典理論での粒子 1 の力積と一致するかは非自明であるが、実際に古典電磁気や一般相対論を使った計算と一致している。散乱行列 $S = 1 + iT$ を遷移行列 T で分解し、式 (4.28) を計算すると

$$\langle \Delta p_1^\mu \rangle = \langle \psi | (1 - iT^\dagger) \mathbb{P}_1^\mu (1 + iT) | \psi \rangle - \langle \psi | \mathbb{P}_1^\mu | \psi \rangle \quad (4.29)$$

$$= \langle \psi | i(\mathbb{P}_1^\mu T - T^\dagger \mathbb{P}_1^\mu) | \psi \rangle + \langle \psi | T^\dagger \mathbb{P}_1^\mu T | \psi \rangle \quad (4.30)$$

$$= \langle \psi | i[\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle + \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle \quad (4.31)$$

となる。最後の式変形では、 S がユニタリーである条件 $T^\dagger = T - iT^\dagger T$ を使った。ここで、第一項を $I_v^\mu = \langle \psi | i[\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle$ 、第二項を $I_r^\mu = \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle$ とおく。 I_v を virtual 項、 I_r を real 項と呼ぶ。遷移行列を一つだけ含む virtual 項は結合定数に関して主要項を出し、real 項は放射運動量と釣り合う寄与をする。

では、実際に virtual 項と real 項を散乱振幅を用いた形式に式変形する。virtual 項については初期状態の定義 (4.26) を代入することで

$$I_v^\mu = \int d\Phi(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p'_1) \phi_2^*(p'_2) i(p_1^\mu - p'_1^\mu) e^{i(p'_2 - p_2) \cdot b/\hbar} \langle p'_1, p'_2 | T | p_1, p_2 \rangle \quad (4.32)$$

となる。散乱振幅 A の定義

$$\langle p'_1, p'_2 | T | p_1, p_2 \rangle = \hat{\delta}^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) A(p'_1, p'_2 | p_1, p_2) \quad (4.33)$$

を代入し、 p'_1, p'_2 の積分を $q_1 = p_1 - p'_1, q_2 = p_2 - p'_2$ に置換する。Virtual 項は 4 点散乱振幅から構成されており積分変数 q_1 は運動量移行に対応している。この積分変数の置換を実行すると

$$I_v^\mu = \int d\Phi(p_1, p_2) \hat{d}^4 q_1 \hat{d}^4 q_2 \theta(p_1^0 - q_1^0) \theta(p_2^0 - q_2^0) \hat{\delta}(-2p_1 \cdot q_1 + q_1^2) \hat{\delta}(-2p_2 \cdot q_2 + q_2^2) \hat{\delta}^4(q_1 + q_2) \\ \times \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 - q_1) \phi_2^*(p_2 - q_2) (-iq_1^\mu) e^{-iq_2 \cdot b/\hbar} A(p_1 - q_1, p_2 - q_2 | p_1, p_2) \quad (4.34)$$

となり、 $\hat{\delta}^{(4)}(q_1 + q_2)$ を用いて q_2 に関して積分し q_1 を q と書き直せば

$$I_v^\mu = \int d\Phi(p_1, p_2) \hat{d}^4 q \theta(p_1^0 - q^0) \theta(p_2^0 + q^0) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q - q^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q + q^2) \\ \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 - q) \phi_2^*(p_2 + q) \times (-iq^\mu) e^{iq \cdot b/\hbar} A(p_1 - q, p_1 + q | p_1, p_2) \quad (4.35)$$

となる。古典極限をとると波動関数 $\phi_i(p_i)$ は $p_i = p_i^{cl}$ ($i = 1, 2$) の古典運動量にピークを持ったデルタ関数的な振る舞いになる。そのため、古典極限をとり $d\Phi(p_1, p_2)$ で積分することは積分変数 p_1, p_2 に古典運動量 p_1^{cl}, p_2^{cl} を代入する操作となる。この操作を行うことを新たな記号として

$$\langle\langle f(p_1, p_2, \dots) \rangle\rangle := \int d\Phi(p_1, p_2) |\phi_1(p_1)|^2 |\phi_2(p_2)|^2 f(p_1^{cl}, p_2^{cl}, \dots) \quad (4.36)$$

と定める。ここで、 $f(p_1, p_2, \dots)$ は少なくとも p_1, p_2 に依存する任意関数である。今、式 (4.35) 中の波動関数を $\phi(p+q) \simeq \phi(p)$ と近似すると、古典極限をとった virtual 項 $I_{v,cl}$ は

$$I_{v,cl}^{\mu} = \left\langle \left\langle \int \hat{d}^4 q \theta(p_1^0 - q^0) \theta(p_2^0 + q^0) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q - q^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q + q^2) \right. \right. \\ \left. \left. (-iq^{\mu}) e^{iq \cdot b/\hbar} A(p_1 - q, p_2 + q | p_1, p_2) \right\rangle \right\rangle \quad (4.37)$$

となる。

次に、real 項について散乱振幅を用いた形式に計算していく。virtual 項と同様に状態の定義を代入し、 T^{\dagger} の後ろに完全系を挟む:

$$I_r^{\mu} = \sum_X \int d\Phi(p_1, p_2, p'_1, p'_2, r_1, r_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p'_1) \phi_2^*(p'_2) \\ \times i(r_1^{\mu} - p_1^{\mu}) e^{i(p'_2 - p_2) \cdot b/\hbar} \langle p'_1, p'_2 | T^{\dagger} | r_1, r_2, X \rangle \langle r_1, r_2, X | T | p_1, p_2 \rangle. \quad (4.38)$$

ここで、完全系に現れた X は中間状態で生成された新たな粒子や力を媒介する粒子を表し、 \sum_X はそれらの自由度の形式的な和を表す。 $\langle p'_1, p'_2 | T^{\dagger} | r_1, r_2, X \rangle = \langle r_1, r_2, X | T | p'_1, p'_2 \rangle^*$ なので

$$I_r^{\mu} = \sum_X \int d\Phi(p_1, p_2, p'_1, p'_2, r_1, r_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p'_1) \phi_2^*(p'_2) \hat{\delta}(r_1 + r_2 + r_X - p'_1 - p'_2) \\ \hat{\delta}(r_1 + r_2 + r_X - p_1 - p_2) i(r_1^{\mu} - p_1^{\mu}) e^{i(p'_2 - p_2) \cdot b/\hbar} A^*(r_1, r_2, r_X | p'_1, p'_2) A(r_1, r_2, r_X | p_1, p_2) \quad (4.39)$$

となる。積分変数を p'_i, r_i から $q_i = p_i - p'_i, w_i = r_i - p_i$ に変換し、

$$\hat{\delta}(r_1 + r_2 + r_X - p'_1 - p'_2) \hat{\delta}(r_1 + r_2 + r_X - p_1 - p_2) = \hat{\delta}(q_1 + q_2) \hat{\delta}(w_1 + w_2 + r_X) \quad (4.40)$$

を用いて q_2 について積分し q_1 を単に q と書くと

$$I_r^{\mu} = \sum_X \int d\Phi(p_1, p_2) \hat{d}^4 q \theta(p_1^0 - q^0) \theta(p_2^0 + q^0) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q - q^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q + q^2) \phi_1^*(p_1 - q) \\ \times \phi_2^*(p_2 + q) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 w_i \theta(p_i^0 + w_i^0) \hat{\delta}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \hat{\delta}(w_1 + w_2 + r_X) \\ \times iw_1 e^{iq \cdot b/\hbar} A^*(p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X | p_1 - q_1, p_2 - q_2) A(p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X | p_1, p_2) \quad (4.41)$$

となる。この古典極限をとりつつ、 p_1, p_2 の積分をすれば、古典極限をとった real 項 $I_{r,cl}$ は

$$I_{r,cl}^\mu = \left\langle \left\langle \sum_X \int \hat{d}^4 q \theta(p_1^0 - q^0) \theta(p_2^0 + q^0) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q - q^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q + q^2) \right. \right. \\ \left. \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 w_i \theta(p_i^0 + w_i^0) \hat{\delta}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \times i w_1 e^{i q \cdot b / \hbar} \hat{\delta}(w_1 + w_2 + r_X) \right. \\ \left. A^*(p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X | p_1 - q_1, p_2 - q_2) A(p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X | p_1, p_2) \right\rangle \right\rangle \quad (4.42)$$

と表されることがわかった。

4.3.2 Goldilocks 条件再考

Virtual 項に着目して Goldilocks 条件を再考する。古典極限 $\xi = (l_c/l_w)^2 \rightarrow 0$ を考えることは、コンプトン波長 l_c と波束の広がり l_w に $l_c \ll l_w$ という極限を考えることに対応する。また、virtual 項の古典極限をとる時 $\phi(p+q) \simeq \phi(p)$ と近似していた。この近似が妥当となる条件は具体的な波動関数 (4.4) から鑑みて

$$\frac{q \cdot u}{m\xi} \ll 1, \quad \Leftrightarrow \quad \bar{q} \cdot u \ll \frac{l_c}{l_w^2} \quad (4.43)$$

である。ここで、 q は 2 粒子散乱時の運動量移行である。一方、on-shell 条件 $\delta(2p \cdot q + q^2)$ を見ると $2p \cdot q + q^2 = 0$ なので、 q^2 と $2p \cdot q$ の揺らぎの程度は同じである。したがって、式 (4.43) の $\bar{q} \cdot u$ を $l_c \bar{q}^2$ に変形することができ、散乱長 l_s は $l_s = 1/\sqrt{\bar{q}^2}$ であるから

$$\frac{l_c}{l_w^2} \ll \frac{l_c}{l_s^2} \quad \Leftrightarrow \quad l_w \ll l_s \quad (4.44)$$

となり、Goldilocks 条件を波束が満たしていれば古典極限を取るときに $\phi(p+q) \simeq \phi(p)$ という近似は正当化される。

4.4 放射波形

これまでは放射運動量など方位角で積分した物理量を扱ってきた。ここでは、一つの方位角へ放射される光子や重力子の波形を求める。有質量粒子の 2 体散乱で放出される放射光や放射重力波の波形を定式化する。まず、放射光の場合を考える。場の強さテンソル $\mathbb{F}^{\mu\nu}$ は

$$\mathbb{F}^{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\hbar^{3/2}} \sum_{\eta=\pm} \int d\Phi(k) \left(a_\eta(k) i k^{[\mu} \varepsilon_\eta^{*\nu]}(k) e^{i k \cdot x / \hbar} + h.c. \right) \quad (4.45)$$

である。次に、放射重力波の場合を考える。計量 $g_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ と摂動展開した時、曲率テンソル $\mathbb{R}^{\mu\nu\rho\sigma}$ は

$$\mathbb{R}^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = -\frac{2\kappa}{\hbar^{5/2}} \sum_{\eta=\pm} \int d\Phi(k) \left(a_\eta(k) k^{[\mu} \varepsilon_\eta^{*\nu]}(k) k^{[\rho} \varepsilon_\eta^{*\sigma]}(k) e^{i k \cdot x / \hbar} + h.c. \right) \quad (4.46)$$

と生成消滅演算子で表せる。今、背景時空は平坦時空であり曲率テンソルと Weyl テンソルは一致する。ヘリシティ固有状態に射影して議論すれば良いので以下時空の添字はしばらく省略する。

一方、古典論での実場の波動 $R(x)$ を考えると

$$R(x) = \int d\Phi(\bar{k}) \left(i\tilde{J}(\bar{k})e^{i\bar{k}\cdot x} + c.c \right) \quad (4.47)$$

と運動量表示できる。 $k^0 < 0$ の時 $\tilde{J}(\bar{k}) := \tilde{J}^*(-\bar{k})$ と定義する。すると、フーリエ変換で $J(y)$ は以下のように定義できる:

$$J(y) = \int \hat{d}^4\bar{k} \tilde{J}(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot y}, \quad \tilde{J}(\bar{k}) = \int d^4y J(y) e^{-i\bar{k}\cdot y}. \quad (4.48)$$

したがって、

$$\begin{aligned} R(x) &= \int \hat{d}^4\bar{k} \hat{\delta}(\bar{k}^2) \tilde{J}(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot x} (\theta(\bar{k}^0) - \theta(-\bar{k}^0)) \\ &= i \int d^4y \hat{d}^4\bar{k} \hat{\delta}(\bar{k}^2) J(y) e^{i\bar{k}\cdot(x-y)} (\theta(\bar{k}^0) - \theta(-\bar{k}^0)) \\ &= i \int d^4y \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2|\bar{\mathbf{k}}|} J(y) \left(e^{-i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)+i\bar{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)+i\bar{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &= i \int d^4y J(y) \frac{|\bar{\mathbf{k}}| d|\bar{\mathbf{k}}|}{8\pi^2} d\cos\theta \left(e^{-i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos\theta} + e^{i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos\theta} \right) \\ &= \int d^4y J(y) \frac{d|\bar{\mathbf{k}}|}{8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left(e^{-i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)} + e^{i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)} \right) \left(e^{i|\bar{\mathbf{k}}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - e^{-i|\bar{\mathbf{k}}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

となる。今、無限の未来での放射について興味があるので内向き進行波を無視すると、放射は

$$R(x) = \int d^4y \frac{J(y)}{8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_0^\infty d|\bar{\mathbf{k}}| \left(e^{-i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - e^{i|\bar{\mathbf{k}}|(x^0-y^0)-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \quad (4.50)$$

$$= \int d^4y \frac{J(y)}{4\pi i |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \quad (4.51)$$

と書き表される。放射のソースから十分離れた位置 x に観測者がいる状況に着目すると

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \simeq |\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^{1/2} = |\mathbf{x}| \left(1 - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{x}^2} \right) \quad (4.52)$$

と近似できる。観測者の向きを表す方位ベクトルを \mathbf{n} として、 $|\mathbf{x}|$ の主要項に着目すると

$$R(x) \simeq \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int d^3\mathbf{y} d\omega \hat{d}^3\bar{\mathbf{k}} \tilde{J}(\bar{k}) e^{-i(\omega-|\mathbf{x}|)+i(\bar{\mathbf{k}}-\omega\mathbf{n})\cdot\mathbf{y}} \quad (4.53)$$

$$= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int \hat{d}\omega \hat{d}^3\bar{\mathbf{k}} \tilde{J}(\bar{k}) e^{-i\omega(x^0-|\mathbf{x}|)} \hat{\delta}^3(\bar{\mathbf{k}} - \omega\mathbf{n}) \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^\infty \hat{d}\omega \tilde{J}(\bar{k})|_{\bar{\mathbf{k}}=\omega\mathbf{n}} e^{-i\omega(x^0-|\mathbf{x}|)} \quad (4.55)$$

となる。したがって、放射事象から十分離れた位置 \mathbf{x} での放射波の周波数領域における波形を $W(\omega)$ とすると

$$W(\omega) = \frac{1}{4\pi} \tilde{J}(\omega, \omega \mathbf{n}) \quad (4.56)$$

とかけることがわかった。つまり、平面波展開したときの運動量表示での振幅が定数倍を除いて放射のスペクトル波形となっている。

KMOC 場合に立ち戻ると無限の未来での電磁場テンソル、Weyl テンソルの期待値に対応する $\tilde{J}(\bar{k})$ はそれぞれ

$$\tilde{J}^{\mu\nu}(\bar{k}) = 2\hbar^{3/2} \sum_{\eta=\pm} \langle \psi | S^\dagger a_\eta(\bar{k}) S | \psi \rangle \bar{k}^{[\mu} \varepsilon_\eta^{*\nu]}(\bar{k}) |_{\bar{k}=(\omega, \omega \mathbf{n})}, \quad (4.57)$$

$$\tilde{J}^{\mu\nu\rho\sigma}(\bar{k}) = 2i\kappa\hbar^{3/2} \sum_{\eta=\pm} \langle \psi | S^\dagger a_\eta(\bar{k}) S | \psi \rangle \bar{k}^{[\mu} \varepsilon_\eta^{*\nu]}(\bar{k}) \bar{k}^{[\rho} \varepsilon_\eta^{*\sigma]}(\bar{k}) |_{\bar{k}=(\omega, \omega \mathbf{n})} \quad (4.58)$$

である。しかし、これは $\omega > 0$ の時で、 $\omega < 0$ の時は $\tilde{J}(\bar{k}) := \tilde{J}^*(-\bar{k})$ である。このように、放射波形が散乱振幅から計算できることがわかった。

4.5 重力波波形の計算方法

$\bar{k}/\omega \cdot \zeta = -1, \zeta \cdot \varepsilon_\pm(\bar{k}) = 0$ を満たすヌルベクトル ζ を導入し、スペクトル波形をヘリシティ固有状態に分解する。式 (2.116) を思い出すと無限遠で outgoing な寄与は Newmann-Penrose (NP) スカラーの $\Psi_4(x)$ であった。これは Weyl テンソルのヘリシティが $h = -2$ の成分だったので $W_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ を Weyl テンソルとすると

$$\Psi_4(x) = \zeta^\mu \varepsilon_-^\nu \zeta^\rho \varepsilon_-^\sigma \langle W_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \rangle \quad (4.59)$$

である。したがって、 $\Psi_4(x)$ の波形 $\Psi_4^0(x)$ は

$$\Psi_4(x) = \frac{\Psi_4^0(x^0 - |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathbf{x}^2}\right) \quad (4.60)$$

なので、spectral 波形 $\tilde{\Psi}_4^0(\omega, \mathbf{n})$ は

$$\tilde{\Psi}_4^0(\omega, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \zeta^\mu \varepsilon_-^\nu \zeta^\rho \varepsilon_-^\sigma \tilde{J}_{\mu\nu\rho\sigma}(\omega, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{2\kappa\omega^2 \hbar^{3/2}}{4} \right) \langle \psi | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | \psi \rangle \quad (4.61)$$

$$= \frac{i}{8\pi} \kappa\omega^2 \hbar^{3/2} \langle \psi | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | \psi \rangle |_{\bar{k}=\omega(1, \mathbf{n})} \quad (4.62)$$

となる。では、初期状態に式 (4.26) を代入し、有質量粒子の2体散乱の際に放射される重力波波形を散乱振幅で表そう。このセットアップを実世界の現象として観測するとしたら、2つの Schwarzschild ブラックホールが散乱する時に放出される重力波を計算していることになる。

散乱振幅で表せる部分は

$$\begin{aligned}
\langle \psi | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | \psi \rangle &= \int d\Phi(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p'_1) \phi_2^*(p'_2) \\
&\quad \times e^{i(p'_2 - p_2) \cdot b / \hbar} \langle p'_1, p'_2 | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | p_1, p_2 \rangle \\
&= \left\langle \left\langle \int \hat{d}^4 q_1 \hat{d}^4 q_2 \theta(p_1^0 - q_1^0) \theta(p_2^0 - q_2^0) \hat{\delta}(-2p_1 \cdot q_1 + q_1^2) \hat{\delta}(-2p_2 \cdot q_2 + q_2^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. e^{-iq_2 \cdot b / \hbar} \langle p'_1, p'_2 | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | p_1, p_2 \rangle \right\rangle \right\rangle \quad (4.63)
\end{aligned}$$

と計算できる。ここで、 p'_1, p'_2 の積分を $q_i = p_i - p'_i$ ($i = 1, 2$) についての積分に置換した。 $\langle p'_1, p'_2 | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | p_1, p_2 \rangle$ を遷移行列を使って書き直すと、力積の場合と同じように S のユニタリー性を用いれば

$$\begin{aligned}
\langle p'_1, p'_2 | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | p_1, p_2 \rangle &= \langle p'_1, p'_2 | a_-(\bar{k}) | p_1, p_2 \rangle + \langle p'_1, p'_2 | i[a_-(\bar{k}), T] | p_1, p_2 \rangle \\
&\quad + \langle p'_1, p'_2 | T^\dagger a_-(\bar{k}) T | p_1, p_2 \rangle \quad (4.64)
\end{aligned}$$

となる。今、初期状態はスカラー場の 2 粒子状態を考えているので $a_-(\bar{k}) | p_1, p_2 \rangle = 0$ であり

$$\begin{aligned}
\langle p'_1, p'_2 | S^\dagger a_-(\bar{k}) S | p_1, p_2 \rangle &= i \langle p'_1, p'_2 | a_-(\bar{k}) T | p_1, p_2 \rangle + \langle p'_1, p'_2 | T^\dagger a_-(\bar{k}) T | p_1, p_2 \rangle \\
&= i \langle p'_1, p'_2, k_- | T | p_1, p_2 \rangle + \langle p'_1, p'_2 | T^\dagger a_-(\bar{k}) T | p_1, p_2 \rangle \quad (4.65)
\end{aligned}$$

となる。結合定数 κ に関して主要項に着目すると第一項の 5 点振幅 A_5 を考えれば良いことになる:

$$\langle p'_1, p'_2, k_- | T | p_1, p_2 \rangle = \hat{\delta}^4(p'_1 + p'_2 + k - p_1 - p_2) A_5(p'_1, p'_2, k_- | p_1, p_2). \quad (4.66)$$

また、 κ に関して主要項に着目しているので、tree の 5 点振幅 A_5^{tree} に着目すれば良い。したがって、NP スカラー $\tilde{\Psi}_4^0$ の結合定数 κ についての主要項は

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_4^0(\omega, \mathbf{n}) &= -\frac{1}{8\pi} \kappa \omega^2 \hbar^{7/2} \left\langle \left\langle \int \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 \bar{q}_i \hat{\delta}(2p_i \cdot \bar{q}_i) e^{-i\bar{q}_2 \cdot b} \hat{\delta}^4(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{k}_-) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. A_5^{tree}(p_1 - q_1, p_2 - q_2, k_- | p_1, p_2) \right\rangle \right\rangle \quad (4.67)
\end{aligned}$$

と分かった。ここで、運動量積分は波数積分に直し、古典極限を取ることで消える項は削除した。さらに、 \bar{A} のように散乱振幅にバーをつけることで結合定数に起因する \hbar を省略することを表すと、ループ数が L 個、外線が n 本の散乱振幅 A_n^L は

$$A_n^L = \hbar^{1 - \frac{n}{2} - L} \bar{A}_n^L \quad (4.68)$$

となる。つまり、 \bar{A} は $\hbar = 1$ としたときの散乱振幅である。したがって、spectral 波形 $\tilde{\Psi}_4^0(\omega, \mathbf{n})$ は

$$\tilde{\Psi}_4^0(\omega, \mathbf{n}) = -\frac{1}{8\pi}\kappa\omega^2 \left\langle \left\langle \hbar^2 \int \prod_{i=1,2} \hat{d}^4\bar{q}_i \hat{\delta}(2p_i \cdot \bar{q}_i) e^{-i\bar{q}_2 \cdot b} \hat{\delta}^4(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{k}_-) \right. \right. \\ \left. \left. \bar{A}_5^{tree}(p_1 - q_1, p_2 - q_2, k_- | p_1, p_2) \right\rangle \right\rangle \quad (4.69)$$

と書けることが分かった。

4.6 ループダイアグラムについての注意

これまでの議論から古典物理量を計算する際に散乱振幅が積分内に現れるということがわかった。もちろんループを含む散乱振幅も結合定数の高次についての計算では考慮しなければならない。この時 tree 計算では無視した on-shell 条件のデルタ関数の中身を再評価する必要が出てくる。本修士論文は tree の議論のみなので省略するが参考文献 [19] に 1 loop の寄与及び場の量子論で漸近的に測定できる量は何かを統一的に論じている。また、1 loop ダイアグラムを考えると計算が tree よりも煩雑になる。その際の計算技術として、ユニタリーカット [20] や loop 積分に関する計算技術 [21–30] が必要となる。

4.7 Tree 散乱振幅からの放射波形の計算

では、具体的に KMOC formalism を用いて重力定数に関して主要な放射波形を計算してみよう。ここでの計算方法では散乱振幅の解析性が肝となり計算が簡略化する [31]。質量 m_1, m_2 を持つスカラー場 ϕ_1, ϕ_2 で記述される粒子が散乱する時に生じる重力波を計算してみよう。ここで計算する期待値はゲージ不変な曲率テンソルではなく簡単のため計量 $h_{\mu\nu}$ に着目する。初期状態 $|\text{in}\rangle$ は

$$|\text{in}\rangle = \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) e^{-ip_2 \cdot b/\hbar} |p_1, p_2\rangle \quad (4.70)$$

と異なるスカラー粒子の 2 粒子状態をとり、

$$\langle \epsilon_{\mu\nu}^h h^{\mu\nu}(x) \rangle := \langle \text{in} | S^\dagger \epsilon_{\mu\nu}^h h^{\mu\nu} S | \text{in} \rangle - \langle \text{in} | \epsilon_{\mu\nu}^h h^{\mu\nu} | \text{in} \rangle \quad (4.71)$$

のヘリシティ固有状態の期待値の古典極限を計算する。ここで $\epsilon_{\mu\nu}^h$ はヘリシティ h の重力波の偏光テンソルである。古典重力解からの揺らぎを正準量子化しており

$$\epsilon_{\mu\nu}^h h^{\mu\nu} = \int d\Phi(k) a_{-h}(k) e^{ikx} + h.c. \quad (4.72)$$

のように運動量 k^μ とヘリシティ h の生成消滅演算子 $a_{-h}(k), a_{-h}^\dagger(k)$ を用いて記述できる。KMOC formalism の一般論から retarded 時間 $u = t - |\vec{x}|$ と周波数領域での波形 $W(b, k)$ を

用いて

$$\langle \epsilon_{\mu\nu}^h h^{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{\kappa}{4\pi|\vec{x}|} \int_0^\infty \hat{d}\omega W(b; k^-) e^{-i\omega u} + c.c. \quad (4.73)$$

と書ける。周波数領域での波形 $W(b, k)$ は

$$iW(b, k^h) = \left\langle \left\langle \int \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 q_i \hat{\delta}(-2p_i \cdot q_i + q_i^2) e^{-iq_2 \cdot b_2} \langle p'_1, p'_2 | S^\dagger a^h(k) S | p_1, p_2 \rangle \right\rangle \right\rangle \quad (4.74)$$

と計算できた。ここで、被積分関数に現れるブラベクトルの引数 p'_i ($i = 1, 2$) は $p'_i = p_i - q_i$ である。結合定数に関して主要項に注目すれば 5 点散乱振幅 $\langle p'_1, p'_2 | a^h(k) T | p_1, p_2 \rangle = A_5(q_1, q_2, k) \hat{\delta}(q_1 + q_2 - k)$ の tree ダイアグラムを計算すれば良い。結合定数に関して主要項の波形を $W^0(b, k)$ とすると

$$W^0(b, k) = \left\langle \left\langle \int \prod_{i=1,2} dq_i \hat{\delta}(q_1 + q_2 - k) \hat{\delta}(q_1 + q_2 - k) e^{-iq_2 \cdot b_2} A_5(q_1, q_2, k) \right\rangle \right\rangle. \quad (4.75)$$

となる。積分変数 q_1^μ を時間的ベクトル v_1, v_2 と空間的ベクトル \tilde{v}, b を用いて基底を張り

$$q_1 = z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_v \tilde{v} + z_b \tilde{b} \quad (4.76)$$

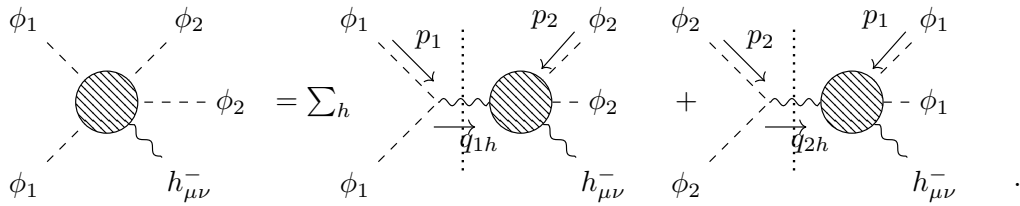
のように積分を実変数 z_1, z_2, z_v, z_b に変える。ここで、 $v_i = p_i/m_i$ はそれぞれ古典的な粒子 $i = 1, 2$ の速度、 $\tilde{b} = b/\sqrt{b^2}$ は衝突係数向きの単位ベクトル、 \tilde{v} は v_1, v_2, \tilde{b} に直交する単位ベクトルで $v^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_{1\nu} v_{2\rho} \tilde{b}_\sigma$ とすると $\tilde{v} = v/\sqrt{v^2}$ である。また、衝突係数と粒子の速度は $v_i \cdot b = 0$ ($i = 1, 2$) として良い。 $\bar{q}_1 = z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_v \tilde{v} + z_b \tilde{b}$ とパラメタ表示すれば 4 次元実空間の積分になり $d^4 \bar{q}_1 = d^4 z \sqrt{\gamma^2 - 1}$ である。ここで、 γ はローレンツ因子で $\gamma = -v_1 \cdot v_2$ である。すると、波形は

$$\begin{aligned} W^0(b, k) &= \int \hat{d}^4 \bar{q}_1 \hat{\delta}(2p_1 \cdot \bar{q}_1) \hat{\delta}(2p_2 \cdot \bar{q}_1 - 2p_2 \cdot \bar{k}) e^{-i\bar{q}_2 \cdot b} \bar{A}_5 \\ &= \int d^4 z \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \delta(z_1 + \gamma z_2) \delta(\gamma z_1 + z_2 + w_2) e^{-i\bar{k} \cdot b + iz_b \sqrt{b^2}} \bar{A}_5 \\ &= \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1} e^{-i\bar{k} \cdot b}}{(4\pi)^2 m_1 m_2} \int dz_2 dz_b dz_v \delta((\gamma^2 - 1)z_2 - w_2) e^{iz_b \sqrt{b^2}} \bar{A}_5 \Big|_{z_1 = -\gamma z_2} \\ &= \frac{e^{-i\bar{k} \cdot b}}{(4\pi)^2 m_1 m_2 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \int dz_b dz_v e^{iz_b \sqrt{b^2}} \bar{A}_5 \Big|_{z_1 = \frac{-\gamma w_2}{\gamma^2 - 1}, z_2 = \frac{w_2}{\gamma^2 - 1}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

となる。ここで $w_i = v_i \cdot \bar{k}$ は粒子 i からみた角周波数である。実積分を留数積分を用いて計算する。 $e^{-i\bar{k} \cdot b}$ の位相は $u \rightarrow u + b \cdot k/k^0$ と retarded 時間が進む効果となる。BCFW recursion 公式を導くときに留数は内線が on-shell になるところを思い出すと

$$A_5(q_1, q_2, k) = \sum_{h=\pm} A_3(-p_1, q_{1h}) \frac{1}{q_{1h}^2} A_4(-p_2, -q_{1h}, k_-) + (1 \leftrightarrow 2) \quad (4.78)$$

のように $q_i^2 = 0$ ($i = 1, 2$) となる極を拾えば良い。これはダイアグラムを用いるとわかりやすく、積分変数 q_i は粒子 i から放出される重力子の運動量に対応している:



したがって、 z_b だけ運動量が複素された 3 点散乱振幅と 4 点散乱振幅を用いれば良い。スピン 0 の有質量粒子との重力相互作用は little group から決まり 3 点 tree 散乱振幅は

$$A_3(p, k) = -\kappa(\varepsilon \cdot p)^2 \tag{4.79}$$

となる。ここで、 p は有質量外線の運動量で零質量の偏光ベクトル ε である。4 点 tree 散乱振幅 A_4 は外線のラベルは 2 章に対応するとして (3.137) の有質量粒子のスピンが 0 の場合である。 $s - m^2 = -2p \cdot k_2$, $u - m^2 = 2p \cdot k_2$ に注意すると

$$A_4(p, k_2^+, k_3^-) = \frac{\kappa^2}{t} \frac{[3|p|2\rangle^4}{(2p \cdot k_2)^2} \tag{4.80}$$

である。各散乱振幅は分かったので、 z_v での実積分を留数の和で表そう。ここで注意する点は、今回の散乱振幅はスカラー場と重力との相互作用からなっており $z_v \rightarrow \infty$ において散乱振幅が極を持つ点である。そこで、 $z_v \in \mathbb{R}$ の実積分は $z_v = \infty$ に関して主値積分を取っていると解釈する。図 4.1 のように上半円 C_{UH} で閉じた反時計周りの閉経路 $\mathbb{R} \cup C_{UH}$ での積分と

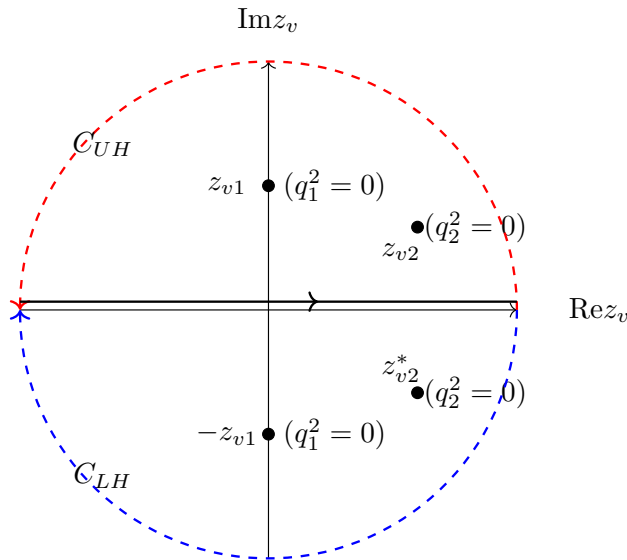


図 4.1 複素積分の積分経路

下半円で閉じた時計周りの閉経路 $\mathbb{R} \cup C_{LH}$ をとると $z_v \in \mathbb{R}$ に関する主値積分は

$$\int_{\mathbb{R}} dz_v = \frac{1}{2} \left(\oint_{\mathbb{R} \cup C_{UH}} dz_v + \oint_{\mathbb{R} \cup C_{LH}} dz_v \right) \tag{4.81}$$

となる。それでは極を持つ z_v を求めよう。まず、 $q_1^2 = 0$ から $z_1 = -\frac{\gamma w_2}{\gamma^2 - 1}$, $z_2 = \frac{w_2}{\gamma^2 - 1}$ であることと $v_i \cdot b = v_i \cdot \tilde{v} = \tilde{v} \cdot b = 0$ ($i = 1, 2$) に注意して

$$0 = q_1^2 = \left(-\frac{\gamma w_2}{\gamma^2 - 1} v_1 + \frac{w_2}{\gamma^2 - 1} v_2 \right)^2 + z_v^2 + z_b^2 = z_v^2 + z_b^2 + \frac{w_2^2}{\gamma^2 - 1}, \quad (4.82)$$

$$z_v = \pm z v_1, \quad z_{v1} = i \sqrt{z_b^2 + \frac{w_2^2}{\gamma^2 - 1}} \quad (4.83)$$

と分かる。次に $q_2^2 = 0$ の極を求めると on-shell 条件からくる $v_1 \cdot q_2 = v_1 \cdot k$, $v_2 \cdot q_2 = 0$ と $q_2 = k - q_1$ に注意して

$$\begin{aligned} 0 = q_2^2 &= (k - q_1)^2 = \left(\frac{w_1}{\gamma^2 - 1} v_1 - \frac{\gamma w_1}{\gamma^2 - 1} v_2 \right)^2 + \left((k \cdot \tilde{v} - z_v) \tilde{v} + (k \cdot b - z_b) \tilde{b} \right)^2 \\ &= (z_v - k \cdot \tilde{v})^2 + (z_b - k \cdot \tilde{b})^2 + \frac{w_1^2}{\gamma^2 - 1}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$z_v = z_{v2}, z_{v2}^*, \quad z_{v2} = k \cdot \tilde{v} + i \sqrt{(z_b - k \cdot \tilde{b})^2 + \frac{w_1^2}{\gamma^2 - 1}} \quad (4.85)$$

と求まる。したがって、 z_v に関する積分は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz_v \bar{A}_5 \Big|_{z_1 = -\frac{\gamma w_2}{\gamma^2 - 1}, z_2 = \frac{w_2}{\gamma^2 - 1}} = i\pi \sum_{i=1,2} (\text{Res}_{z_v=z_{vi}} \bar{A}_5 - \text{Res}_{z_v=z_{vi}^*} \bar{A}_5) \quad (4.86)$$

と実行できる。時間領域での波形を計算することを考えるとあと z_b, ω の積分が残っている。周波数 ω に関して積分を行った後 z_b の積分を行うと計算が簡略化する。実行する積分は

$$\int dz_b e^{i z_b \sqrt{b^2}} \hat{d}\omega e^{-i\omega u} i\pi \sum_{i=1,2} (\text{Res}_{z_v=z_{vi}} \bar{A}_5 - \text{Res}_{z_v=z_{vi}^*} \bar{A}_5) \quad (4.87)$$

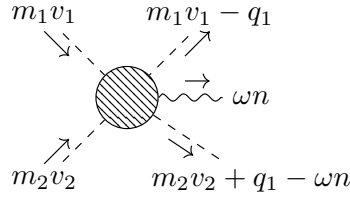
となる。ここで、 q_i, k は周波数の次元を持っていたので $z_b = \omega \hat{z}_b$ と無次元化する。3点 tree 振幅 (4.79) と 4点 tree 振幅 (4.80) は周波数に関して $\mathcal{O}(\omega^0)$ であるから、周波数に関して ω の単項式である 5点 tree 散乱振幅は $\mathcal{O}(\omega^{-2})$ である。したがって、被積分関数は

$$dz_b \hat{d}\omega e^{i(z_b \sqrt{b^2} - \omega u)} \text{Res} \bar{A}_5 \sim d\hat{z}_b \hat{d}\omega e^{i\omega(\hat{z}_b \sqrt{b^2} - u)} \omega^2 \omega^{-2} \quad (4.88)$$

であり、周波数に関する積分はデルタ関数 $\hat{\delta}(u - \hat{z}_b \sqrt{b^2})$ として寄与する。ここで、 ω^2 の一つは dz_b 由来であり、もう一つは積分測度 dz_v 由来である。デルタ関数 $\hat{\delta}(u - \hat{z}_b \sqrt{b^2})$ により積分 z_v の積分は自明になる。よって、放出される重力子の方向を n^μ として

$$\langle \epsilon_{\mu\nu}^h(n) h^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \rangle = \frac{\kappa\pi i}{(4\pi)^3 m_1 m_2 \sqrt{\gamma^2 - 1} |\vec{x}|} \sum_{i=1,2} (\text{Res}_{z_v=z_{vi}} \bar{A}_5 - \text{Res}_{z_v=z_{vi}^*} \bar{A}_5) \Big|_{z_b = \frac{t - |\vec{x}| + n \cdot b}{\sqrt{b^2}}} \quad (4.89)$$

となる。以上をまとめると、質量 m_1, m_2 の粒子が重力相互作用するときに放射される重力波を Newton 定数に関する主要項に着目して計算するには、



のような2本の質量 m_1 の外線と2本の質量 m_2 の外線と放射重力波に対応する外線を1本持つ5点 tree 散乱振幅を考えれば良い。 q_1 を粒子の速度と衝突計数とそれらから作られる外積ベクトルで $v_1, v_2, \tilde{b}, \tilde{v}$ でパラメタ付けると、外線の on-shell 条件から v_1, v_2 の係数は決まり

$$q_1 = -\frac{\gamma\omega(n \cdot v_2)}{\gamma^2 - 1}v_1 + \frac{\omega(n \cdot v_2)}{\gamma^2 - 1}v_2 + z_v\tilde{v} + z_b\tilde{b} \quad (4.90)$$

のように z_v, z_b を用いて表される。5点振幅を z_v に関する複素関数とみなしたとき、 $z_v \in \mathbb{C}$ に関する上半平面と下半平面での留数を計算し $z_b = \omega \frac{t - |\vec{x}| + n \cdot b}{\sqrt{b^2}}$ と代入した後 $\omega = 1$ とすれば時間領域での重力波波形が計算できるということである。

4.8 回転する粒子の記述

大きさを持つ古典力学の物体は自転する自由度を持つ。ここでは、自転の自由度を KMOC formalism で記述する方法を考えてみよう。量子力学では粒子にはスピンの自由度があり、それは角運動量と同じ次元を持つので、スピン s を用いると古典粒子の自転の大きさ \vec{J} を特徴付けることが可能となる。次元解析をしてみると

$$|\vec{J}|^2 \sim \hbar^2 s(s+1) \quad (4.91)$$

となるので、古典極限 $\hbar \rightarrow 0$ を取るときに $|\vec{J}|$ が有限値であることを要請するとスピン量子数 $s \rightarrow \infty$ が必要となる。この素朴な発想を定式化する際に便利なのが coherent spin formalism である [32]。

4.8.1 Coherent spin formalism

ここで有質量粒子の little group の添字を持った生成消滅演算子 a_I を定義してみる。非自明な交換関係は

$$[a^I, a_J^\dagger] = \delta_J^I \quad (4.92)$$

でそれ以外の交換関係は0である。これを用いてスピン演算子 S^i を Pauli 行列を用いて

$$S^i = \frac{\hbar}{2} a_I^\dagger (\sigma^i)^I_J a^J \quad (4.93)$$

と定義すると

$$\begin{aligned}
[S^i, S^j] &= \hbar^2 (a_I^\dagger a^J a_K^\dagger a^L) \left(\left(\frac{\sigma^i}{2} \right)^I{}_J \left(\frac{\sigma^j}{2} \right)^K{}_L - \left(\frac{\sigma^j}{2} \right)^I{}_J \left(\frac{\sigma^i}{2} \right)^K{}_L \right) \\
&= \hbar^2 (a_I^\dagger a_K^\dagger a^J a^L) \left(\left(\frac{\sigma^i}{2} \right)^I{}_J \left(\frac{\sigma^j}{2} \right)^K{}_L - \left(\frac{\sigma^j}{2} \right)^I{}_J \left(\frac{\sigma^i}{2} \right)^K{}_L \right) + \hbar^2 a_I^\dagger a^L \left(\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] \right)^I{}_L \\
&= i\hbar \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\hbar}{2} a_I^\dagger (\sigma^k)^I{}_J a^J \right) = i\hbar \varepsilon_{ijk} S^k \tag{4.94}
\end{aligned}$$

と $su(2)$ の Lie 代数をなす。ここで、二行目で生成消滅演算子の交換関係を用い、三行目第一項で $I \leftrightarrow K, J \leftrightarrow L$ に関して対称であることと三行目の第二項で Pauli 行列の交換関係を用いた。これは、量子化軸を z 軸方向にとって固定しており、Lorentz 共変な表示でもない。量子化軸に関しては、スピン 0 のスカラー状態を $a_I |0\rangle = 0$ ($I = 1, 2$) と定義し、スピン s の状態 $|s, \{I_1, \dots, I_{2s}\}\rangle$ は

$$|s, \{I_1, \dots, I_{2s}\}\rangle := \frac{1}{\sqrt{(2s)!}} a_{I_1}^\dagger \cdots a_{I_{2s}}^\dagger |0\rangle \tag{4.95}$$

として構成できる。生成演算子同士は交換するので $2s$ 個の $SU(2)$ 添字を持った完全対称テンソルを用いてスピンの自由度を記述している。このようにスピン状態を記述すれば有質量 spinor-helicity formalism の時のようにスピンの量子化軸を指定しない表示となる。また、規格化定数 $\frac{1}{\sqrt{(2s)!}}$ は

$$\langle s, \{I_1, \dots, I_{2s}\} | s', \{J_1, \dots, J_{2s'}\} \rangle = \delta_{s'}^s \delta_{J_1}^{I_1} \cdots \delta_{J_{2s'}}^{I_{2s}} \tag{4.96}$$

となるように選んでいる。共変化する前に spin-coherent 状態 $|\alpha\rangle$ を定義しよう:

$$|\alpha\rangle := e^{-\frac{1}{2}\alpha^* a^J} e^{\alpha^I a_I^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}} \sum_{s=0, \frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{I_1, \dots, I_{2s}} \frac{\alpha^{I_1} \cdots \alpha^{I_{2s}}}{\sqrt{(2s)!}} |s, \{I_1, \dots, I_{2s}\}\rangle. \tag{4.97}$$

ここで、 α_I は $SU(2)$ spinor で α_I^* は複素共役を表し $\|\alpha\|^2 := \sqrt{\alpha_I^* \alpha^I}$ であり、 s の和は 0 以上の整数だけでなく正の半整数に関するもとっている。このように定義すれば spin-coherent 状態 $|\alpha\rangle$ は

$$a^I |\alpha\rangle = \alpha^I |\alpha\rangle, \quad \langle \alpha | \alpha \rangle = 1 \tag{4.98}$$

と消滅演算子 a_I の正規化された固有状態となる。同様に完全性も

$$\int \frac{d^2\alpha d^2\alpha^*}{\pi^2} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{2s=0}^{\infty} |s, \{I_1, \dots, I_{2s}\}\rangle \langle s, \{I_1, \dots, I_{2s}\}| \tag{4.99}$$

と満たす。spin-coherent 状態でのスピン演算子との期待値を計算してみると

$$\langle \alpha | S^i | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2} \alpha_I^* (\sigma^i)^I{}_J \alpha^J \tag{4.100}$$

であり、 $\hbar \rightarrow 0$ となる古典極限をとる時に有限となることを要請すると $\|\alpha\| = \mathcal{O}(\hbar^{-\frac{1}{2}})$ となることがわかる。また、分散は

$$\begin{aligned} \langle \alpha | S^i S^j | \alpha \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \alpha_I^* (\sigma^i)^I{}_J (\sigma^j)^K{}_L \alpha^L \langle \alpha | a^J a_K^\dagger | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | S^i | \alpha \rangle \langle \alpha | S^j | \alpha \rangle + \frac{\hbar^2}{4} \alpha_I^* (\sigma^i \sigma^j)^I{}_L \alpha^L \\ &= \langle \alpha | S^i | \alpha \rangle \langle \alpha | S^j | \alpha \rangle + \frac{\hbar^2}{4} \delta^{ij} \alpha_I^* \alpha^I + \frac{\hbar}{2} i \varepsilon_{ijk} \langle \alpha | S^k | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.101)$$

という計算と $\alpha_I = \mathcal{O}(\hbar^{-\frac{1}{2}})$ とスケールすることから

$$\langle \alpha | S^i S^j | \alpha \rangle - \langle \alpha | S^i | \alpha \rangle \langle \alpha | S^j | \alpha \rangle = \mathcal{O}(\hbar) \quad (4.102)$$

と確かに $\hbar \rightarrow 0$ 極限で消えることがわかる。ここで、2行目でスピン生成消滅演算子の交換関係を3行目では Pauli 行列の (反) 交換関係 $2\sigma^i \sigma^j = \{\sigma^i, \sigma^j\} + [\sigma^i, \sigma^j]$ を用いた。

それでは、4次元 Lorentz 共変なスピンベクトルを定義しよう。これまでの議論は有質量粒子の静止系をとりスピン演算子を定義していた。これを運動量 p^μ を持つように Lorentz boost すれば良い。すると、上で定義したスピン演算子は Pauli-Lubanski 擬ベクトル S^μ になる。具体的に書くと

$$S^\mu = \frac{\hbar}{2} a_I^\dagger (\sigma_p^\mu)^I{}_J a^J \quad (4.103)$$

であり、 $(\sigma_p^\mu)^I{}_J$ は

$$(\sigma_p^\mu)^I{}_J := \frac{1}{2m} (\langle p^I | \bar{\sigma}^\mu | p_J \rangle + [p^I | \sigma^\mu | p_J]) \quad (4.104)$$

と定義され粒子の運動量 p^μ 向きに量子化軸を選んだ4元の Pauli 行列である ($p_\mu (\sigma^\mu)^I{}_J = 0$)。ここで定義された Pauli-Lubanski 擬ベクトルは確かに

$$[S^\mu, S^\nu] = \frac{i\hbar}{m} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho S_\sigma \quad (4.105)$$

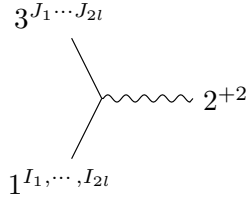
という交換関係を満たす。ここで、4階の完全反対称テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\varepsilon_{0123} = 1$ という convention である。この交換関係は $p^\mu = (m, \vec{0})$ と粒子の静止系をとると (4.94) を再現する。運動量 p^μ を持つ粒子の spin-coherent 状態での期待値をとれば

$$\langle p, \alpha | S^\mu | p, \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2} \alpha_I^* (\sigma_p^\mu)^I{}_J \alpha^J \quad (4.106)$$

であり、 $p_\mu \langle p, \alpha | S^\mu | p, \alpha \rangle = 0$ を満たし古典的なスピンベクトルを再現している。

4.8.2 Kerr ブラックホールとの対応

ここで、3章の (3b) に対応する同質量スピン l 粒子と重力子との minimal 結合を考えてみよう。つまり、以下のような kinematics を持つ3点散乱振幅を考える:



$$= A_3^{\{I_1, \dots, I_{2s}\}, \{J_1, \dots, J_{2s}\}} = \frac{\kappa^2}{2} m^2 x^2 \frac{[\mathbf{31}]^{2l}}{m^{2l}}$$

この kinematics を持つ 3 点散乱振幅を用いて、外線が spin-coherent 状態である 3 点散乱振幅 $A(p', \beta|p, \alpha, k)$ を考えよう。ここで、粒子 1 の運動量を p , 零質量粒子の運動量 k , 粒子 3 の運動量を p' とし、古典の散乱問題と対応付けるため p, k は ingoing をとる。外線が spin-coherent 状態である 3 点散乱振幅を計算すると

$$\begin{aligned} A(p', \beta|p, \alpha, k^{+2}) &:= \sum_{s, s'} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2)} \delta_{ss'}}{\sqrt{(2s)!} \sqrt{(2s')!}} \alpha^{I_1} \dots \alpha^{I_{2s}} \beta_{J_1}^* \dots \beta_{J_{2s'}}^* A_3^{\{I_1, \dots, I_{2s}\}}_{\{J_1, \dots, J_{2s'}\}} \\ &= \frac{\kappa}{2} m^2 x^2 e^{-\frac{1}{2}(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2)} \sum_s \frac{1}{(2s)!} \left(\frac{\beta_I^* [p^I p_J] \alpha^J}{m} \right)^{2s} \\ &= \frac{\kappa}{2} m^2 x^2 \exp \left[-\frac{1}{2}(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2) + \frac{\beta_I^* [p^I p_J] \alpha^J}{m} \right] \end{aligned} \quad (4.107)$$

となる。では、 $|p'^I\rangle$ と $|p^I\rangle$ の関係式を求めよう。 $p'^2 = p'^2 = -m^2$ と同じ質量なので p, p' はローレンツ変換で結びつく:

$$p'^{\mu} = \exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \Sigma_V^{\alpha\beta} \right)^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}. \quad (4.108)$$

ここでパラメタ $\omega_{\mu\nu}$ を運動量保存則から $p' = p + k$ となるように選べば、それと同じだけスピノル表現のローレンツ変換を $|p^I\rangle$ に作用させれば $|p'^I\rangle$ を得る。外線が on-shell なので $2p \cdot k = p'^2 - p^2 - k^2 = 0$ となること、 $\omega_{\mu\nu}$ は k_{μ} から構成されることから $\omega_{\mu\nu} p^{\nu} = 0$ である。したがって、指数関数を展開した時の 2 次以上の項は零となる。では、ベクトル表現である $p^{\mu}, p'^{\mu}, k^{\mu}$ に着目してパラメタ $\omega_{\mu\nu}$ を求めよう。 p^{μ} をローレンツ変換して得られる p'^{μ} は計算すると

$$p'^{\mu} = \exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \Sigma_V^{\alpha\beta} \right)^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} = p^{\mu} + \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} (\Sigma_V^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} = p^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} \quad (4.109)$$

となる。ここで、ローレンツ変換のベクトル表現 $(\Sigma^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}$ は

$$(\Sigma^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = -i(\eta^{\alpha\mu} \delta_{\nu}^{\beta} - \eta^{\beta\mu} \delta_{\nu}^{\alpha}) \quad (4.110)$$

である。したがって、回転角度を表すパラメタは

$$\omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{m^2} (k_{\mu} p_{\nu} - p_{\mu} k_{\nu}) \quad (4.111)$$

と分かった。三角 spinor と四角 spinor に対するローレンツ変換の表現行列は

$$(S^{\mu\nu})_a{}^b = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a{}^b, \tag{4.112}$$

$$(S^{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \tag{4.113}$$

であるから

$$\begin{aligned} |p'^I]_a &= |p^I]_a + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_a{}^b|p_I]_b = |p^I]_a + \frac{1}{4m^2}(kp - pk)|p^I]_a \\ &= |p^I]_a + \frac{1}{2m^2}kp|p^I]_a = |p^I]_a + \frac{k_{a\dot{b}}}{2m}|p^I]{}^{\dot{b}}, \end{aligned} \tag{4.114}$$

$$|p'^I\rangle^{\dot{a}} = |p^I\rangle^{\dot{a}} - \frac{k^{\dot{a}b}}{2m}|p^I\rangle_b \tag{4.115}$$

のように p^μ の三角 spinor と四角 spinor が求まった。ここで、1 行目から 2 行目には $(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a{}^b = -2\eta^{\mu\nu}\delta_a^b$ と $k \cdot p = k_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$ を、2 行目の等式では Dirac 方程式 $|p^I]_a = \frac{p_{a\dot{a}}}{m}|p^I]{}^{\dot{a}}$ を用いた。では、式を簡略化するため平均化した運動量 p_a を定義する:

$$p_a = \frac{1}{2}(p + p') \Leftrightarrow p' = p_a + \frac{k}{2}, \quad p = p_a - \frac{k}{2}. \tag{4.116}$$

外線の on-shell 条件 $p^2 = -m^2, p \cdot k = k^2 = 0$ を p_a に焼き直すと $p_a^2 = -m^2, p_a \cdot k = k^2 = 0$ となる。したがって、上のローレンツ変換の議論がそのまま使え $k \rightarrow \frac{k}{2}$ とすれば良いから

$$|p^I]_b = |a^I]_b - \frac{k_{b\dot{b}}}{4m}|a^I]{}^{\dot{b}}, \tag{4.117}$$

$$[p'^I]^b = [a^I]^b - \langle a^I|_b \frac{k^{\dot{b}b}}{4m} \tag{4.118}$$

である。ここで、 $(p_a)_{b\dot{b}} = |a^I]_b \langle a_I|_{\dot{b}}$ である。これらの結果を代入すれば

$$\begin{aligned} [p'^I p_J] &= [a^I a_J] - \frac{1}{4m} \langle a^I|_k |a_J] - \frac{1}{4m} [a^I|_k |a_J] - \frac{k^2}{16m^2} \langle a^I a_J \rangle \\ &= [a^I a_J] - \frac{k_\mu}{2} (\sigma_{p_a}^\mu)^I{}_J = m\delta_J^I - \frac{k_\mu}{2} (\sigma_{p_a}^\mu)^I{}_J \end{aligned} \tag{4.119}$$

であり、spin-coherent 状態の 3 点散乱振幅は

$$\begin{aligned} A(p', \beta|p, \alpha, k^{+2}) &= \frac{\kappa^2}{2} m^2 x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2) + \frac{1}{m}\beta_I^* \left([a^I a_J] - \frac{1}{2}k_\mu (\sigma_{p_a}^\mu)^I{}_J\right) \alpha^J\right) \\ &= \frac{\kappa^2}{2} m^2 x^2 e^{-\frac{1}{2}(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2) + \beta_I^* \alpha^I} \exp\left(-\frac{k_\mu}{2m}\beta_I^* (\sigma_{p_a}^\mu)^I{}_J \alpha^J\right) \end{aligned} \tag{4.120}$$

となる。

$$p, p' \sim \mathcal{O}(\hbar^0), \quad k^\mu \sim \mathcal{O}(\hbar), \quad \alpha^I, \beta^I \sim \mathcal{O}(\hbar^{-\frac{1}{2}}) \tag{4.121}$$

であるから

$$\frac{k_\mu}{2m} \beta_I^* (\sigma_{p_a}^\mu)^I{}_J \alpha^J \sim \mathcal{O}(\hbar^0) \quad (4.122)$$

は古典極限をとると有限になる項であり、

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2) + \beta_I^* \alpha^I\right) \quad (4.123)$$

は $\alpha_I = \beta_I$ 以外では指数関数の中身が非零で古典極限をとると消える。つまり、古典粒子は上の minimal 結合では自転の角運動量を交換しない。したがって、古典極限をとるときに効いてくる 3 点振幅は $\alpha = \beta$ の時で

$$A(p', \beta = \alpha | p, \alpha, k^{+2}) = \frac{\kappa}{2} m^2 x^2 e^{-\bar{k} \cdot a}, \quad a^\mu := \frac{\hbar}{2m} \langle \alpha | \sigma_{p_a}^\mu | \alpha \rangle = \frac{\langle S^\mu \rangle}{m} \quad (4.124)$$

である。ここで、 \bar{k} は波数ベクトルで、スピン長ベクトル a^μ は Kerr ブラックホールのスピン a に対応する。実際、質量 m 、速度 v^μ 、スピン長 a^μ の粒子が運動する時、Newton 定数 G_N の一次のオーダーでエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}(x)$ は

$$T_{\mu\nu}(x) = m \int d\tau u^{\{\mu} \exp(a * \partial)^{\nu\}}{}_\rho u^\rho \delta^{(4)}(x - u\tau), \quad (a * \partial)^{\mu\nu} := \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} a_\alpha \partial_\beta \quad (4.125)$$

となる。これは G_N に関して 1 次だがスピン長 a に関しては任意のオーダーで Kerr 時空の計量を再現する。この運動量テンソルと重力子 $h_{\mu\nu}$ との相互作用

$$\int d^4x h_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu} \quad (4.126)$$

を考えると運動量表示で正のヘリシティを持った重力子と $e^{-a \cdot k}$ に比例する相互作用が出る [33]。

第 5 章

On-shell 散乱振幅を用いた Ringdown 波の計算

この章では、著者が進行中である研究で得られた結果について述べる。まず、ブラックホール合体や吸収効果を散乱振幅を用いて記述する手法をレビューする。

5.1 吸収・潮汐変形効果

重力子を媒介する散乱を念頭に置いている事象は、ブラックホールと中性子星のようなコンパクト天体の 2 体散乱である。KMOC の定式化では一粒子状態を古典的な点粒子とみなしている。しかし、実際にはブラックホールは構造を持っている。例えば、事象の地平面の内部に侵入した光は、事象の地平面の外部に脱出することはできない。KMOC の定式化は inspiral に対応するような状況で摂動計算の威力を発揮する。摂動計算の時のオーダーは 2 軸あり、一つが相対速度 v に関する PN 展開、他方が Newton 定数 G_N に関する PM 展開である。前者は Newton 重力への特殊相対論的な補正に、後者が一般相対論的な補正に対応する。将来計画を考えると図 5.1 にあるようにニュートン定数 G_N^7 のオーダーまでの精度で重力波波形を測定できる。このオーダーまでの精密観測には同じオーダーの重力波モデル波形計算が必要となる。このオーダーでは inspiral の段階でも他方の重力場により一方が潮汐変形したり重力場のエネルギーを吸収する効果が観測できるようになる。そのため、吸収・潮汐変形効果を取り入れられるように KMOC の定式化を拡張することは将来観測精度の発展において意義深い。

5.1.1 吸収効果の取り入れ方法

吸収・潮汐変形効果を導入するにあたって吸収の効果を取り入れる方法は提案されている。ここではその一つである [34] をレビューする。要点は無遠くからは見えない自由度に物理的自由度が抜けていっているような開放系を考える。例えば、見えている物理系としての作用 S_{vis}

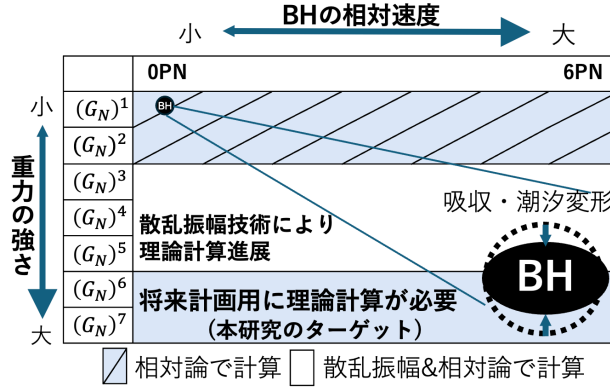


図 5.1 吸収・潮汐変形に関わる PM 展開のオーダー

を

$$S_{vis} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \psi)^2 - |D_\mu \phi_1|^2 - m_1^2 |\phi_1|^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \phi_2^2 + Q_s \psi |\phi_1|^2 \right) \quad (5.1)$$

とする。状況としては零質量スカラー粒子 ψ (ディラトン) と光子と重力子が力を媒介し、スカラー粒子 1 はスカラー電荷 Q_s , 電磁電荷 Q , 質量 m_1 を持っている。スカラー粒子 2 は質量 m_2 を持っている。見えない自由度を記述する作用 S_{inv} により、ディラトンと光子と重力子を吸収する。

$$S_{inv} = \int d^4x \sqrt{-g} (\kappa \phi_2 \psi O_0 + \kappa \phi_2 F_{\mu\nu} O_1^{\mu\nu} + \kappa \phi_2 W_{\mu\nu\rho\sigma} O_2^{\mu\nu\rho\sigma}) \quad (5.2)$$

粒子 2 がディラトンや光子、重力子を吸収した状態を X と呼ぶことにすると、 $O_0, O_1^{\mu\nu}, O_2^{\mu\nu\rho\sigma}$ は状態 X を記述する場である。これら X 状態の 2 点相関関数は Lehmann-Källén 表示で表せば、Feynmann 図では伝播関数に対応し運動量表示で

$$\begin{aligned} \text{=====} &= \int_{m_2^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{-i\rho(\mu^2)}{k^2 + \mu^2 - i0} \\ \mu_1 \mu_2 \text{=====} \nu_1 \nu_2 &= \int_{m_2^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{-i\Pi_1^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2}(\mu^2, k)}{k^2 + \mu^2 - i0} \\ \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \text{=====} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 &= \int_{m_2^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{-i\Pi_2^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\mu^2, k)}{k^2 + \mu^2 - i0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

のようにスペクトル関数 $\rho, \Pi_1^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2}, \Pi_2^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}$ を用いて表せる。ここで、 Π_1, Π_2 のテンソル構造はそれぞれ電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ とワイルテンソル $W_{\mu\nu\rho\sigma}$ の対称性から決まる。例えば、 $\Pi_2^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2}$ は電磁場テンソルと結合している。電磁場テンソルは反対称テンソルなので

$$\Pi_1^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} = -\Pi_1^{\mu_2 \mu_1 \nu_1 \nu_2} = -\Pi_1^{\mu_1 \mu_2 \nu_2 \nu_1} \quad (5.4)$$

と仮定しても一般性は失われない。2 点相関関数は互いに交換しても値は変わらないから

$$\Pi_1^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = \Pi_1^{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \quad (5.5)$$

を満たす。今、2 点相関関数の運動量 k^μ とローレンツ不変テンソルである Minkowski 計量と完全反対称テンソル $\eta_{\mu\nu}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ から上の条件を満たすテンソルは 2 通りある:

$$\Pi_1^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = \rho_1^1(\mu^2)\eta^{\nu_1[\mu_1}\eta^{\mu_2]\nu_2} + \rho_1^2(\mu^2)\frac{1}{k^2}\left(k^{\mu_1}k^{[\nu_1}\eta^{\mu_2]\nu_2} + k^{\mu_2}k^{[\nu_2}\eta^{\nu_1]\mu_1}\right). \quad (5.6)$$

また、UV 理論である一般相対論において、4 次元時空の真空解である Schwarzschild 時空上の Einstein-Maxwell 理論は自己双対である。IR 理論でも UV の対称性が保存されると思うと

$$\Pi_1^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Pi_1^{\mu_3\mu_4\nu_3\nu_4} \quad (5.7)$$

を満たす。これから $\rho_1^1(\mu^2)$, $\rho_1^2(\mu^2)$ は関係付いて

$$\Pi_1^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = \rho_1(\mu^2)\left(\eta^{\nu_1[\mu_1}\eta^{\mu_2]\nu_2} + \frac{2}{k^2}\left(k^{\mu_1}k^{[\nu_1}\eta^{\mu_2]\nu_2} + k^{\mu_2}k^{[\nu_2}\eta^{\nu_1]\mu_1}\right)\right) \quad (5.8)$$

と制限できる。この 4 次元時空での Maxwell 理論の自己双対性は on-shell 散乱振幅の言葉では X 状態を内線とする粒子 2 と光子の 4 点 tree 散乱振幅はヘリシティが揃っていると消えることに対応する。 $\Pi_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ についても同様で $O_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ は Weyl テンソルと同じ添え字の対称性を持ち、2 点の入替で対称である。さらに、UV 理論である一般相対論を考えると Schwarzschild ブラックホール摂動論ではパリティ奇、偶で変わらず同じ準固有振動数のスペクトルを持つ。このような重力版の自己双対性がある。これらの自己双対性が IR 理論でも保存されると思うと $\Pi_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ のテンソル構造 $\hat{\Pi}_2$ が決まる。したがって、一つの関数 $\rho_2(\mu^2)$ を用いて

$$\Pi_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\mu^2, k) = \rho_2(\mu^2)\hat{\Pi}_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(k) \quad (5.9)$$

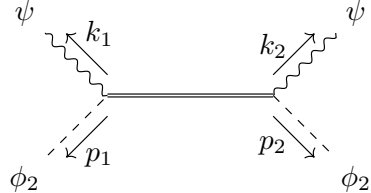
と変数分離できる。

それぞれのスペクトル関数 ρ , ρ_1 , ρ_2 は一般相対論とのマッチングさせる。つまり、IR 理論としては有効的に 1 体系の理論を UV では一般相対論を考えている。一般相対論とのマッチング方法は、吸収断面積を通して行う。吸収される粒子のエネルギーが小さい ($\omega \ll 1$) 時、一般相対論から計算された吸収断面積 σ_{abs} は

$$\sigma_{abs} = \begin{cases} 16\pi G_N^2 m_2^2 & (\text{スカラー粒子}) \\ \frac{64}{3}\pi G_N^4 m_2^4 \omega^2 & (\text{光子}) \\ \frac{256\pi}{45} G_N^6 m_2^6 \omega^4 & (\text{重力子}) \end{cases} \quad (5.10)$$

である [35, 36]。これを内線で X 状態を交換する粒子 2 と散乱振幅の前方散乱の虚部と比較してスペクトル関数の低エネルギー部分を求める。on-shell 散乱振幅の言葉では、質量 m_2 のスカラー粒子とヘリシティ $h = 0, \pm 1, \pm 2$ の零質量粒子と質量が m_2 より大きいスピン $|h|$ の 3 点結合が S_{inv} により定義され、その 3 点から構成される粒子 2 と零質量粒子のコンプトン前

方散乱を考えている。光子と重力子の場合にはテンソルの対称性から決まる係数だけ異なるだけなのでスカラー粒子を吸収する場合で説明する。スカラー粒子の吸収効果が現れるコンプトン散乱振幅は



$$= i\kappa^2 \int_{m_2^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{\rho(\mu^2)}{(k_2 + p_2)^2 + \mu^2 - i0} = i\bar{A}_{4,ab}$$

スカラー吸収4点振幅

である。前方散乱 $k_2 = (\omega, \omega \mathbf{n}) = -k_1$, $p_2 = (m_2, \mathbf{0})$ をスカラー粒子の静止系で考える。光学定理から前方散乱の虚部は全断面積 (今回の場合は吸収断面積) に等しい。つまり、

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} &= \frac{\text{Im } \bar{A}_{4,ab}^{\text{前方}}}{2m_2\omega} = \frac{\kappa^2}{2m_2\omega} \int_{m_2^2}^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \text{Im} \frac{1}{(k_2 + p_2)^2 + \mu^2 - i0} \\ &= \frac{\kappa^2}{2m_2\omega} \int_{m_2^2}^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \text{Im} \frac{1}{-m_2^2 - 2m_2\omega + \mu^2 - i0} \end{aligned} \quad (5.11)$$

であり、公式

$$\text{Im} \frac{1}{x - i0} = \pi\delta(x) \quad (5.12)$$

を用いれば

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi\kappa^2}{2m_2\omega} \rho(m_2^2 + 2m_2\omega) \quad (5.13)$$

とスペクトル関数と一般相対論から計算された吸収断面積がマッチングできる。スペクトル関数は粒子2の励起状態を表しているので $\rho(\mu^2) = 0$ ($\mu^2 < m_2^2$), $\rho(\mu^2) \geq 0$ ($\mu^2 > m_2^2$) であるから

$$\rho(\mu^2) \simeq \frac{\sigma_{abs}}{\pi\kappa^2} (\mu^2 - m_2^2) = \frac{G_N m_2^2}{2\pi} (\mu^2 - m_2^2) \quad (0 \leq \mu^2 - m_2^2 \ll 1) \quad (5.14)$$

と分かる。 μ^2 が大きい領域でのスペクトル関数の値は物理的に何に対応しているのだろうか。入射するディラトンのエネルギーがあるエネルギースケール Λ より小さい領域での有効場の量子論を考えてみよう。古典運動量 p の粒子2に運動量 l のディラトンが入射する時、高エネルギーでの X の内線での積分は

$$\int_{\Lambda^2 + m_2^2}^{\infty} \frac{\rho(\mu^2)}{(p+l)^2 + \mu^2 - i0} d\mu^2 = \int_{\Lambda^2 + m_2^2}^{\infty} \frac{\rho(\mu^2)}{\mu^2 - m_2^2 + 2p \cdot l + l^2} d\mu^2 \sim \int_{\Lambda^2 + m_2^2}^{\infty} \frac{\rho(\mu^2)}{\mu^2 - m_2^2} d\mu^2 \quad (5.15)$$

幅 $A^m(p_X|p, k)$ を考えると

$$\begin{aligned}
A^m(p_X|p, k) &:= \frac{g_l}{m_X^{2l-1}} \underbrace{[23^{\{1\}}] \cdots [23^1]}_{l-m} \underbrace{[23^2]^{m-h} \langle 23^2 \rangle}_{l+h}^{l+h} \\
&= g_l \frac{(2P)^l (-1)^m}{m_X^{l-1} (2l)!} \sqrt{\frac{4\pi(l+m)!(l-m)!(l+h)!(l-h)!}{2l+1}} {}_h Y_{l,m}(\theta, \phi) \\
&= g_l \frac{\lambda(s, M^2, 0)^{\frac{l}{2}} (-1)^m}{m_X^{2l-1} (2l)!} \sqrt{\frac{4\pi(l+m)!(l-m)!(l+h)!(l-h)!}{2l+1}} {}_h Y_{l,m}(\theta, \phi)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

と計算される。ここで、零質量の時の三角 spinor と四角 spinor の具体形 (3.18) と $|X^I]_a = \sqrt{m_X} \delta_a^I$ を用い、スピン重みつき球面調和関数 ${}_h Y_{s,m}(\theta, \phi)$ の定義 (付録 A) を用いた。さらに、相対運動量は重心系の運動量 $s = -(p+k)^2$ として多項式 $\lambda(x, y, z)$ を用いて

$$2P\sqrt{s} = \sqrt{\lambda(s, M^2, 0)} = s - M^2, \quad \lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \tag{5.21}$$

とローレンツ不変な形で表せたこと、この散乱振幅は g_l を無次元量にするために出てくる次元合わせの定数 λ, m_X とスピン重みつき球面調和関数の規格化由来の定数からなっていることに注意する。上の散乱振幅から計算される反応断面積がヘリシティ h の零質量粒子が質量 M の有質量粒子に吸収される断面積である。初期状態が 2 粒子で終状態が n 粒子となる微分反応断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma_{abs} = \frac{1}{4EP} |A(k_1, \dots, k_n|p_1, p_2)|^2 d\text{LIPS}_n(p_1, p_2), \tag{5.22}$$

$$d\text{LIPS}_n(p_1, p_2) = \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i^n k_i) \prod_{i=1}^n d\Phi(k_i) \tag{5.23}$$

であった。ここで、 P は初期 2 粒子の重心系での運動量、 E は重心系でのエネルギーである。今、粒子 $X^{I_1, \dots, I_{2l}}$ のスペクトルを知らないのでスペクトル関数 $\rho(m_X^2)$ を用いて

$$\sum_{\{I_1, \dots, I_{2l}\}} \int dm_X^2 d\Phi(p_X) \rho_l(m_X^2) |p_X, \{I_1, \dots, I_{2l}\}\rangle \langle p_X, \{I_1, \dots, I_{2l}\}| = 1_X \tag{5.24}$$

と X の 1 粒子状態が張る射影演算子 1_X を表そう。したがって、終状態がスピン l の粒子となる上記に示した 3 点散乱振幅による吸収断面積 σ_l^{abs} は

$$\begin{aligned}
\sigma_l^{abs} &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, M^2, 0)}} \int dm_X^2 d\Phi(p_X) \rho_l(m_X^2) \hat{\delta}^{(4)}(p+k-p_X) \\
&\quad \times A_{\{I_1, \dots, I_{2l}\}}(p, k|p_X) A^{\{I_1, \dots, I_{2l}\}}(p_X|p, k) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda(s, M^2, 0)}} \int dm_X^2 \rho_l(m_X^2) \delta(s - m_X^2) \sum_{m=-l}^l |A^m(p_X|p, k)|^2 \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda(s, M^2, 0)}} \int dm_X^2 \rho_l(m_X^2) \delta(s - m_X^2) |g_l|^2 \frac{\lambda^l}{m_X^{2(2l-1)} (2l)!^2} \\
&= \pi \frac{|g_l|^2}{(2l)!^2} \rho_l(s) (\lambda(s, M^2, 0))^{l-\frac{1}{2}} s^{1-2l}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

と計算できる。

ここで、零質量粒子のエネルギー P がスカラー粒子の質量 m より十分小さく、Schwarzschild ブラックホール時空を背景として零質量粒子が伝播している問題を考えてみよう。前節の議論では X 状態のスペクトル $\rho(\mu^2)$ の $\mu^2 - m^2 \gg 1$ という範囲との対応しか見えてなかったが、ここでは1粒子の励起状態を表す X がブラックホール摂動論ではどのような状態に対応するのかが分かる。簡単のため零質量粒子はスカラー $h = 0$ の時を考える。すると、2章で扱った Schwarzschild 時空上での零質量の Klein-Gordon 方程式 $\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = 0$ を再利用できる。準固有振動の解析の時と同様にモード解 $\varphi_{\omega,lm}$ は球面調和関数を用いて

$$\varphi_{\omega,lm} = e^{-i\omega t} \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.26)$$

と表せ、動径方向の関数は亀座標 r_* で

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2G_N M}{r^3}\right) \right] u_l(r) = 0 \quad (5.27)$$

という微分方程式を満たすのだった。この方程式の解は u_l^{in}, u_l^{up} という漸近形を指定した解を持っていた。今回は反射率 R_l と透過率 T_l を用いて漸近系を記述すると

$$\sqrt{2\omega} u_l^{in} \sim \begin{cases} T_l e^{-i\omega r_*} & (r_* \rightarrow -\infty) \\ R_l e^{i\omega r_*} + e^{-i\omega r_*} & (r_* \rightarrow \infty) \end{cases}, \quad (5.28)$$

$$\sqrt{2\omega} u_l^{up} \sim \begin{cases} e^{i\omega r_*} - \frac{T_l R_l^*}{T_l^*} e^{-i\omega r_*} & (r_* \rightarrow -\infty) \\ T_l e^{i\omega r_*} & (r_* \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (5.29)$$

とかける。ここで、 $\sqrt{2\omega}$ は後に Klein-Gordon 内積を規格化するための定数である。Wronskian が $r_+ \rightarrow \pm\infty$ で一致するという条件から確率保存則 $|R_l|^2 + |T_l|^2 = 1$ が出ていた。動径方向の方程式は実係数なので u_l^{in}, u_l^{up} の複素共役も解である。それらを

$$u_l^{out} := (u_l^{in})^*, \quad u_l^{down} = (u_l^{up})^* \quad (5.30)$$

と定義する。すると、 u^{in} は t に関して無限の過去で無限遠から入射し無限の未来で T_l だけポテンシャルを超えてブラックホール内部に透過し R_l だけ反射したモード、 $u^{out} = (u^{in})^*$ は無限の過去で事象の地平面と無限遠から入射され無限の未来で無限遠で一つに集まるモードである。一方、 u^{up} は t に関して無限の過去で事象の地平面から入射し無限の未来でポテンシャルに反射した波と透過した波に分かれるモード、 $u^{down} = (u^{up})^*$ は無限の過去で事象の地平面と無限遠から入射し無限の未来で一つにまとまるモードである。もちろん、これら4つのモードは互いに線形従属であり、漸近形から

$$\varphi_{\omega,lm}^{in} = R_l \varphi_{\omega,lm}^{out} + T_l \varphi_{\omega,lm}^{down}, \quad (5.31)$$

$$\varphi_{\omega,lm}^{up} = T_l \varphi_{\omega,lm}^{out} - \frac{T_l R_l^*}{T_l^*} \varphi_{\omega,lm}^{down} \quad (5.32)$$

となっている。散乱問題を考えたいので運動量 \vec{k} の in 状態に対応するモードを探したい。in 状態に対応するモード φ_k^+ は

$$\varphi_k^+ = e^{-i\omega t} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{f_k(\theta)}{r} e^{i\omega r_*} \right), \quad r_* \rightarrow \infty \quad (5.33)$$

という漸近形を持ってほしい。 $f_k(\theta)$ は運動量 \vec{k} で入射した時に Schwarzschild ブラックホールにより散乱される振幅である。この漸近形を持つモードは φ_l^{in} である。平面波の球面波展開

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = e^{i\omega r_* \cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr_*) P_l(\cos\theta) \quad (5.34)$$

と球ベッセル関数 $j_l(z)$ の漸近展開

$$j_l(z) \sim \frac{1}{2iz} \left((-i)^l e^{iz} - i^l e^{-iz} \right) \quad (z \rightarrow \infty) \quad (5.35)$$

とルジャンドル多項式 $P_l(\hat{k}\cdot\hat{x})$

$$P_l(\hat{k}\cdot\hat{x}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{l=-m}^m Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}^*(\hat{x}), \quad \hat{k} := \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \hat{x} := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (5.36)$$

を用いれば、球ベッセル関数の漸近形の e^{-iz} の係数を合わせることで

$$\varphi_k^+ = \sum_{lm} \frac{4\pi i}{\sqrt{2\omega}} (-1)^l Y_{lm}^*(\hat{k}) \varphi_{\omega,lm}^{in}(t, r, \hat{x}) \quad (5.37)$$

と分かる。 $f_k(\theta)$ と R_l との対応を見よう。散乱行列を S_l とすると

$$f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{S_l - 1}{2i\omega} P_l(\hat{k}\cdot\hat{x}), \quad S_l = \eta_l e^{2i\delta_l} = (-1)^{l+1} R_l \quad (5.38)$$

である。ここで、 -1 の項は入射平面波の寄与であり、弾性定数 η_l と位相シフト δ_l と散乱行列 S_l の関係を示した。無限の未来で、運動量 \vec{k} で無限遠まで届く平面波とブラックホールに落ちる球面波からなるモード φ_k^- を考えると、その境界条件を満たしているのは $\varphi_{\omega,lm}$ で

$$\varphi_k^- = \sum_{lm} \frac{4\pi i}{\sqrt{2\omega}} Y_{lm}^*(\hat{k}) \varphi_{\omega,lm}^{out}(t, r, \hat{x}) \quad (5.39)$$

$$\sim e^{-i\omega t} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{f_{-k}^*(\theta)}{r} e^{-i\omega r} \right) \quad (r_* \rightarrow \infty) \quad (5.40)$$

となる。つまり、 $\varphi_{\omega,lm}^{in}$ は t に関して無限の過去で無限遠にいる観測者にとっての一粒子状態に対応するモード関数で、 $\varphi_{\omega,lm}^{out}$ は無限の未来で無限遠にいる観測者にとっての一粒子状態に対応するモード関数である。では、 $\varphi_{\omega,lm}^{up}$, $\varphi_{\omega,lm}^{down}$ はどのようなモードであろうか。 $\varphi_{\omega,lm}^{up}$ は、無限の過去で事象の地平面から放射し無限の未来で無限遠まで到達するモードでホワイトホー

ルを記述するモード、 $\varphi_{\omega,lm}^{down}$ は無限の過去で無限遠から入射し無限の未来でブラックホールに吸収されるモードである。つまり、二体散乱の文脈では

$$X_{\omega,lm}^+ = \varphi_{\omega,lm}^{up}, \quad X_{\omega,lm}^- = \varphi_{\omega,lm}^{down} \quad (5.41)$$

と事象の地平面上の観測者にとって φ^{up} は無限の過去で一粒子に状態にみえ、 φ^{down} は無限の未来で一粒子状態に見える。交換関係を導入して場の量子論で記述しても良いが、今は一粒子状態にのみ興味があるので相対論的量子力学の範疇で散乱行列を定義しよう。場の量子論的記述は [38] を参照されたい。散乱行列を定義する前にモード間の内積を定めよう。ここでは、Klein-Gordon 内積を採用する。Schwarzschild ブラックホールの事象の地平面より外で定義された関数 ϕ_1, ϕ_2 に対して、Klein-Gorden 内積 (ϕ_1, ϕ_2) は

$$(\phi_1, \phi_2) := i \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} (\phi_2^* \partial_{\mu} \phi_1 - \phi_1 \partial_{\mu} \phi_2) \quad (5.42)$$

と定義されていた。ここで Σ は Cauchy スライスで $d\Sigma^{\mu}$ は時間方向正方向きの法線ベクトルである。これは Cauchy スライスの取り方に依存しない。例えば t 一定面を Cauchy スライスとして具体的にとれば

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int_{-\infty}^{\infty} dr_* r^2 d\Omega_2 (\phi_2^* \partial_t \phi_1 - \phi_1^* \partial_t \phi_2) \quad (5.43)$$

となる。したがって、in, out, up, down のモード間の内積で消えないものは (5.32) を参照すれば

$$(\varphi_{\omega,lm}^{out}, \varphi_{\omega',l'm'}^{in}) = R_l \hat{\delta}(\omega' - \omega) \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\varphi_{\omega,lm}^{down}, \varphi_{\omega',l'm'}^{in}) = T_l \hat{\delta}(\omega' - \omega) \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (5.44)$$

$$(\varphi_{\omega,lm}^{out}, \varphi_{\omega',l'm'}^{up}) = T_l \hat{\delta}(\omega' - \omega) \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\varphi_{\omega,lm}^{down}, \varphi_{\omega',l'm'}^{up}) = -\frac{T_l R_l^*}{T_l^*} \hat{\delta}(\omega' - \omega) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.45)$$

となる。ここで、散乱行列 S を

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = \begin{pmatrix} (\varphi_{k'}^-, \varphi_k^+) & (\varphi_{p'}^i, X_{\omega,lm}^+) \\ (X_{\omega',l'm'}^-, \varphi_k^+) & (X_{\omega',l'm'}^-, X_{\omega,lm}^+) \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

と定義しよう。ここで、ケットベクトル $|\alpha\rangle$ には無限の過去で無限遠で運動量 k で入射する粒子には φ_k^+ を、無限の未来で無限遠で運動量 k で放射する粒子には φ_k^- を、無限の未来でブラックホールに吸収される粒子には X^- を、無限の過去でホワイトホールから出てくる粒子には X^+ を対応させている。つまり、上のブラケット記法での表記は $|K\rangle$ は無限の過去での無限遠での一粒子状態 φ_k^+ を表し、 $|X_{\omega,lm}\rangle$ は $X_{\omega,lm}^+$ を表していると約束すると、内積は

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \begin{cases} 2\omega \hat{\delta}^{(3)}(\vec{K}' - \vec{K}) & (\beta = K', \alpha = K) \\ \hat{\delta}(\omega' - \omega) \delta_{ll'} \delta_{mm'} & (\beta = X_{\omega',l'm'}, \alpha = X_{\omega,lm}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (5.47)$$

となっている。この時、散乱行列は

$$\langle P' | S | P \rangle = 2\omega \hat{\delta}^{(3)}(\vec{P}' - \vec{P}) + 4\pi i \hat{\delta}(\omega' - \omega) f(P', P), \quad (5.48)$$

$$\langle X_{\omega', lm} | S | P \rangle = 4\pi i \hat{\delta}(\omega' - \omega) \frac{T_l}{\sqrt{2\omega}} Y_{lm}^*(\hat{P}), \quad (5.49)$$

$$\langle P' | S | X_{\omega, lm} \rangle = 4\pi i \hat{\delta}(\omega' - \omega) \frac{T_l}{\sqrt{2\omega}} Y_{lm}(\hat{P}'), \quad (5.50)$$

$$\langle X_{\omega', l' m'} | S | X_{\omega, lm} \rangle = -\frac{T_l R_l^*}{T_l^*} \hat{\delta}(\omega' - \omega) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.51)$$

である。ここで $f(P', P)$ は

$$f(P', P) := \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i\omega} P_l(\hat{P} \cdot \hat{P}') \quad (5.52)$$

と表せ、ベクトルのなす角 θ ではなくベクトル表示で書いた散乱振幅である。この散乱振幅行列は in, up からなる完全系から out, down からなる完全系への遷移行列なのでユニタリである。つまり、

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} \langle \alpha | S^{\dagger} | \gamma \rangle \langle \gamma | S | \beta \rangle &= \int d\Phi(P) \langle \alpha | S^{\dagger} | P \rangle \langle P | S | \beta \rangle \\ &+ \int_0^{\infty} \hat{d}\omega \sum_{lm} \langle \alpha | S^{\dagger} | X_{\omega, lm} \rangle \langle X_{\omega, lm} | S | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle \end{aligned} \quad (5.53)$$

を満たす。同様に $\langle \alpha | S S^{\dagger} | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle$ となる。それでは、マッチングを考えるために観測量を計算してみよう。ここでは、吸収断面積 σ_{abs} を計算する。終状態の微小配位体積における微分吸収断面積は

$$d\sigma_{abs} = \frac{V}{T} \frac{|\langle X_{\omega', lm} | S | P \rangle|^2}{\langle X_{\omega', lm} | X_{\omega', lm} \rangle \langle P | P \rangle} d\Pi_X \quad (5.54)$$

であった。ここで、 T は反応時間、 V は空間体積で、 $d\Pi_X$ は X 状態の位相体積測度である。つまり、 $d\Pi_X$ は

$$\int d\Pi_X |X\rangle \langle X| = 1 - \int d\Pi_P |P\rangle \langle P| \quad (5.55)$$

と X 状態への射影演算子となるような測度である。反応時間 T は $T = \hat{\delta}(\omega - \omega)$ と空間体積 V は $V = \hat{\delta}^{(3)}(\vec{P} - \vec{P})$ と十分長いとすると、吸収断面積は

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} &= \sum_{lm} \int_0^{\infty} d\omega' \delta(\omega' - \omega) \frac{4\pi^2}{\omega^2} |T_l|^2 Y_{lm}^*(\hat{P}) Y_{lm}(\hat{P}) \\ &= \frac{4\pi^2}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} |T_l(\omega)|^2 \frac{2l+1}{4\pi} P_l(0) = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |T_l(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (5.56)$$

となる。これが散乱振幅で計算した結果と等しいとすることで、3点振幅とスペクトル関数の積 $|g_l|^2 \rho_l(s)$ をマッチングすることになる。つまり、前節で Lehmann-Källén 表示していたスペクトル関数は、この節でのスペクトル関数と3点結合定数との積からなることが分かった。

5.3 散乱振幅を用いた ringdown 波の波形計算

これまでの議論から吸収チャンネルにスピン l の粒子を含む 4 点散乱振幅をスペクトル関数 ρ_l を用いて Lemann-Källén 表示した後、スペクトル関数を角運動量 l の greybody 因子とマッチングさせれば良いことがわかった。これを用いて、KMOC formalism を用いて無質量粒子と有質量スカラー粒子の 2 体散乱に伴う反射波を計算し、それを 2 章での時間領域での ringdown 波形と比較する。これらの波形は古典散乱問題を場の量子論で記述しているか、ポテンシャル問題として波動方程式を解いているかの違いでしかないので素朴には一致する。以下、簡単のためヘリシティ $h = 0$ の零質量スカラー (ディラトン) が吸収される効果に注目する。

5.3.1 放射波の球面波展開

ディラトン φ は消滅演算子 $a(k)$ を用いて

$$\varphi(x) = \int d\Phi(k) a(k) e^{ikx} + h.c. \quad (5.57)$$

のように平面波展開できた。しかし、今回比較する 2 章示したブラックホール摂動論で計算した波形は球面波であるので基底の変換を行う。周波数領域でのディラトンの放射波 $R(\omega, r, \hat{x})$ は KMOC formalism の一般論から

$$R(\omega, r, \hat{x}) = \langle \tilde{\varphi}(\omega, r, \hat{x}) \rangle = \frac{-i}{4\pi r} \langle in | S^\dagger a(\omega \hat{x}) S | in \rangle e^{i\omega r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (5.58)$$

とかけた。ここで初期状態 $|in\rangle$ はのちに指定するが、 $\hat{x} = \vec{x}/r$ である。これが球面波展開の式と等しくあって欲しいので

$$\frac{-i}{4\pi r} \langle in | S^\dagger a(\omega \hat{x}) S | in \rangle e^{i\omega r} = \frac{u_{lm}(\omega, r)}{r} Y_{lm}(\hat{x}) \quad (5.59)$$

と比較すると

$$u_{lm}(\omega, r) = -\frac{i}{4\pi} \int d^2\hat{x} \langle in | S^\dagger a(\omega \hat{x}) S | in \rangle e^{i\omega r} Y_{lm}^*(\hat{x}) \quad (5.60)$$

となる。したがって時間領域での放射波の r の主要項 $u_{lm}(t, r)$ は KMOC formalism で

$$u_{lm}(t, r) = u_{lm}(t - r) = \left\langle \left\langle \frac{-i}{4\pi} \int_0^\infty \hat{d}\omega e^{-i\omega(t-r)} \int d^2\hat{x} \langle in | S^\dagger a(\omega \hat{x}) S | in \rangle Y_{lm}^*(\hat{x}) + c.c. \right\rangle \right\rangle \quad (5.61)$$

とかけることがわかった。

5.3.2 スペクトル関数のマッチング

それではスピン l が内線に入る時のコンプトン散乱を考えよう。軌道角運動量 l のみに依存したスペクトル関数 ρ_l と Lorentz 共変な球面調和関数 (付録 A) を用いて

$$A_4(p, k|p', k') = \int_{m^2}^{\infty} d\mu^2 \sum_{lm} \rho_l(\mu^2) \left[\frac{Y_{lm}^*(k'; p') Y_{lm}(k; p)}{s - \mu^2 + i0} + \frac{Y_{lm}^*(k, p') Y_{lm}(k', p)}{u - \mu^2 + i0} \right] + (\text{t チャンネルや接触項}) \quad (5.62)$$

とかける。ここでは、4 点散乱振幅は基本構成要素である 3 点散乱振幅から構成されるとし接触項はないと仮定する。光学定理より

$$\text{Im}A_4^{\text{前方}} = 2m\omega\sigma_{tot} \quad (5.63)$$

が成り立つ。ここで外線の運動量は $p'^{\mu} = -p^{\mu} = (m, \vec{0})$, $k' = -k = (\omega, \omega\hat{k})$ とラベルされており σ_{tot} は全反応断面積である。Lorentz 共変な球面調和関数 $Y_{lm}(\hat{k}, u)$ は $u = (1, \vec{0})$ の時、通常の球面調和関数 Y_{lm} になるので、前方散乱の振幅の虚部で聞いてくるものは

$$\text{Im}A_4^{\text{前方}} = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l(s)(2l+1)P_l(0) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l(s)(2l+1) \quad (5.64)$$

である。ここで、重心系のエネルギー $s = m^2 + 2m\omega$ である。右辺は $\sigma_{tot} = \sigma_{abs} + \sigma_{el}$ と吸収断面積と弾性散乱断面積に分かれる。吸収断面積は

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi^2}{\omega^2} (2l+1) |T_l|^2 \quad (5.65)$$

のように greybody factor とマッチングさせる。弾性散乱断面積とは、無限遠で見える自由度であるディラトンや有質量スカラーが内線を走る散乱振幅から構成される散乱断面積である。これは ringdown 波形のうち tail 効果に対応していると考えられる。そこでスペクトル関数を $\rho_l(s) = \rho_l^{el}(s) + \rho_l^{abs}(s)$ とどちらの寄与かわかるように分けておくと

$$\rho_l^{abs}(m^2 + 2m\omega) = \frac{8\pi m}{\omega} |T_l(\omega)|^2 \quad (5.66)$$

のように吸収に対応するスペクトル関数と greybody 因子がマッチングされる。

5.3.3 期待値の計算

ではディラトンと有質量スカラー粒子の 2 体散乱を考えよう。この散乱問題設定に対応して、初期状態に

$$|in\rangle = \int d\Phi(p) \phi(p) e^{-ip \cdot b/\hbar} |p, \gamma\rangle, \quad |\gamma\rangle = \mathbb{C}_{\gamma} |0\rangle \quad (5.67)$$

と Goldilocks 条件を満たす波束 $\phi(p)$ を持つ有質量粒子の 1 粒子状態と零質量スカラーのコヒーレント状態の積状態をとろう。ここで、 $\gamma(k)$ は平面波の複素振幅で、 b は衝突係数である。この衝突係数は 4.5 節で見たように時間領域での波形の位相を進ませる。

前述のようなコヒーレント状態を含む初期状態を選択した際、期待値 $\langle in | S^\dagger a(\omega \hat{x}) S | in \rangle$ の古典極限がブラックホール摂動論から導出される反射率を正確に再現するか否かは非自明な課題である。この対応関係の妥当性については、現在詳細な解析を進めている段階にある。

第6章

まとめと展望

6.1 まとめ

本修士論文では 2 章でブラックホール摂動論のうち特に静的球対称ブラックホール背景時空からの摂動に関する方程式を導き Schwarzschild ブラックホールに関する ringdown 波を扱った。加えて Kerr ブラックホールに関する摂動論を行うときに威力を発揮する Newman-Penrose 形式を導入し Teukolski 方程式を導出した。ここでの記述は 2 体問題をポテンシャル問題として扱っており、2 体散乱問題をポテンシャル問題として扱う Schrödinger 方程式と式の形という点でも似ていた。また、3 章で平坦時空上で場の量子論に着目し相互作用の局所性とユニタリ性、ローレンツ対称性から散乱振幅の外線運動量依存性を制限する議論をレビューした。4 章では、多体散乱を記述できる場の量子論を用いて平坦時空での粒子の古典的な散乱を記述する手法 (KMOC 法) をレビューした。要点としては観測量の期待値の古典極限 ($\hbar \rightarrow 0$) を取ると、きちんと $\mathcal{O}(\hbar^{-n}) (n = 1, 2, \dots)$ の寄与が消え $\mathcal{O}(\hbar^0)$ の項が残るということである。この手法では古典力学の基本原理である作用反作用の原理を明示的に守りつつ、古典粒子の散乱に伴う放射を計算できる利点がある。On-shell 散乱振幅技術のおかげでラグランジアンを用いた形式でなくても局所的な相互作用を扱うことができるようになった。そこで、3 点 on-shell 散乱振幅を理論の基本構成要素とし、質量が異なる 3 点散乱振幅をブラックホール摂動論の greybody 因子とマッチングすることで古典重力での吸収効果を記述する方法、spin-coherent 状態と呼ばれる有限の大きさを持ったスピン状態の無限個の重ね合わせ状態を用いることで自転する古典粒子を記述する方法をレビューした。

本修士論文では前述の手法を適用し、中間状態における吸収効果を考慮した重力波波形を球面波基底で時間領域の関数として計算した。これは、マッチングする greybody 因子を球対称時空のものを採用することに依拠する。本手法で得られた波形はブラックホールへ入射したスカラー波の反射波に相当するため、ブラックホール摂動論の枠組みを通じても評価が可能である。

6.2 展望

Schwarzschild ブラックホール背景時空におけるマスター方程式から透過率の周波数依存性は数値的に計算されている。モデル依存の一致であることを確認するためにも、数値的に求められた透過率をマッチングさせ数値積分した結果を摂動論と KMOC 法で比較する。こうしてスカラー粒子における波形の理解を深めた後、スピン 1, 2 を持つ光子と重力子を外線にもつ散乱振幅になるように kinematics 依存性を持たせる。力を媒介する粒子と有質量粒子の 2 体散乱問題での反射に関して考察を深めた後、その 3 点相互作用を基本要素として内線に含む有質量同士の 2 体散乱問題に応用できるだろう。

これまで、3 点相互作用の基本要素を適切にマッチさせることを考え、tree の散乱振幅を計算してきた。基本要素の理解が進んだ後は、ループ数の多い散乱振幅を計算し Newton 定数 G_N に関して高次の項の計算に進む。通常のダイアグラム計算の時と同様にループを含む散乱振幅は計算が煩雑になる。ループを計算する時には Leading-singularity という計算技術 [39] が発展してきている。KMOC 法を用いて 2 体散乱に伴う力積を計算する場合、ループの形状で古典極限をとった時に消えるかを判断し、内線をカットした時の singularity を用いて計算すると良いことが 1 ループレベルでは分かってきた [40]。つまり、4 点 tree 散乱振幅を内線が on-shell の時の singularity を用いて 3 点から構成した時と同様に、古典極限を取った後で寄与するループ積分は内線をカットした後の散乱振幅から計算可能ということである。これをループを含む 5 点散乱振幅の計算に応用することで、 G_N の高次摂動項を計算できるだろう。

実際の 2 天体の合体はブラックホールだけでなく、中性子星のようなコンパクト天体からなるイベントもある。中性子星のようなコンパクト天体は他方の天体からのエネルギーの吸収効果だけでなく潮汐変形効果や潮汐変形に伴う散逸効果もあるため、そのような効果はどの散乱振幅とマッチングさせるかが問題となる。また、ブラックホールに静的な潮汐力を加えた時の潮汐変形率は無毛定理から消える [42, 43] が、動的な外場が加わった時は 0 でない値を持つ。このような外場による潮汐変形効果の解析には Worldline Effective Field Theory が用いられている [44–46]。Worldline に対応する粒子と重力子とを対応させたダイアグラム計算と KMOC 法で用いる散乱振幅の対応は力積の場合解析されている [47]。これらを統合し波形計算に応用することで潮汐変形率の情報を含む波形が計算可能となる。潮汐変形を含んだ波形は数値相対論を用いて計算されており、その inspiral 領域と一致することを確認できた場合、波形計算のコストが大幅に簡約されることが期待される。例えば、中性子星の潮汐変形率の精密観測は中性子星内部に存在する高温・高密度下の核物質の状態方程式の制限につながり、場の量子論で記述される原子核物理分野にも古典極限を取ることで間接的に貢献できる可能性がある。

謝辞

駒場素粒子論研究室の皆さん、基礎物理学研究所 (YITP) の皆さん、私との他愛のない雑談から物理の議論まで付き合ってくださいありがとうございました。特に、時間管理の苦手な私に辛抱強く関わってくれた指導教員の野海俊文准教授には感謝してもしきれません。大川祐司教授、奥田拓也助教、鈴木健太助教、ゼミを監督してください大変感謝しています。学振 DC1 申請書へのコメント等をくださった菊川芳夫教授ありがとうございました。また、西井さん、佐藤さん、吉村さん、蔡さんら先輩、桑原さん、山崎さんら後輩、同期の稲田さん、歓迎会や合宿などのイベント、学会出張の際にはお世話になりました。特に、時間管理の甘い私を叱咤激励してくれた西井莞治氏には心中より感謝を申し上げます。また、研究室秘書の佐々木さん、高橋さん、出張申請などの事務手続きだけでなくイベント企画やユーモアのある話等、私の研究室生活に彩りを与えてくださりありがとうございました。これからの博士課程でも皆さんに多大に迷惑を掛けていく所存です。よろしくお願いします。

また、YITP に所属している青木勝輝助教、大下誉翔助教には共同研究における議論や、学振 DC1 の添削等をしていただき大変感謝しております。これからも共同研究等していただけると幸いです。最後に、YITP の同期は研究・勉強の息抜きになるような刺激的な話題をたくさん提供してくださいありがとうございました!!

付録 A

球面調和関数

A.1 2次元球面上のスピン重みつき球面調和関数

■球面調和関数 二次元球面 S^2 上の解析関数の展開基底となる球面調和関数 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ について述べる。球面調和関数 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ は

$$\int d\mathbf{n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.1})$$

のように正規化されている。ここで、 \mathbf{n} は単位球面上を指すベクトルである。また、

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}') = \delta^{(2)}(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \quad (\text{A.2})$$

のように直交関数系をなしている。球面調和関数はルジャンドル陪多項式 $P_l^{|m|}(x)$ を用いてかけて

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A.3})$$

の notation をとる。 $(-1)^m$ が無いといった notation の違いがある。ルジャンドル陪多項式はルジャンドル多項式 $P_l(x)$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (\text{A.4})$$

を用いて

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (\text{A.5})$$

である。

■**スピンの重みつき球面調和関数** 有質量スカラーとヘリシティ h の零質量粒子とスピン s の粒子からなる 3 点散乱振幅を扱った時にスピンの重みつき球面調和関数 ${}_h Y_{sm}$ が現れた。この時は、ローレンツ対称性から 3 点の kinematics を決めスピン s 粒子の静止系をとることで生じた。実際、スピンの重みつき球面調和関数は $SO(3)$ の表現論で決まる関数で Wigner-D 関数 D_{hm}^s を用いて書かれる [48]。具体的な表式は

$${}_h Y_{sm}(\theta, \varphi) = (-1)^{s+m-h} \sqrt{\frac{(2s+1)(s+m)!(s-m)!}{4\pi(s+h)!(s-h)!}} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2s} e^{im\varphi} \\ \times \sum_{n=\max(0, m-h)}^{\min(s+m, s-h)} \binom{s-h}{n} \binom{s+h}{n+h-m} (-1)^n \left(\cot \frac{\theta}{2}\right)^{2n+h-m} \quad (\text{A.6})$$

となる。これは

$$\int d\mathbf{n} {}_h Y_{sm}(\vec{n}) {}_h Y_{s'm'}(\vec{n}) = \delta_{ss'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.7})$$

のように規格化されている。また、角度 θ, ϕ に寄らず

$$\sum_{m=-l}^l (l-m)!(l+m)! |{}_h Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} (l-h)!(l+h)! \quad (\text{A.8})$$

となる。

Lie 代数としては $so(3) \cong su(2)$ なので $SU(2)$ スピノルを用いて表した方が式としては簡略化し、4次元ローレンツ共変な表示に拡張しやすい。2次元球面上のベクトル $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ を量子化軸とした spinor κ_{\pm} を考える。これら κ_{\pm} は式 (3.71) にて具体的な表示を求めていた。再度表記すると

$$\kappa_{-}^a = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \kappa_{+}^a = e^{i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

であり、 $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^a {}_b \kappa_{\pm}^b = \pm \kappa_{\pm}^a$ を満たしていた。スピンの重みつき球面調和関数のうち spinor を用いて kinematics が決まる構成要素 ${}_h \tilde{Y}_{sm}(\vec{n})$ を

$${}_h \tilde{Y}_{sm}(\vec{n}) = \underbrace{\overbrace{\kappa_{+}^1 \cdots \kappa_{+}^1 \kappa_{+}^2 \cdots \kappa_{+}^2}_{s+h}}^{\overbrace{s-m}} \underbrace{\kappa_{-}^2 \cdots \kappa_{-}^2}_{s-h} \quad (\text{A.10})$$

と定義すると、スピンの重みつき球面調和関数は

$${}_h Y_{sm}(\theta, \varphi) = (-1)^m (2s)! \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi(s+m)!(s-m)!(s-h)!(s+h)!}} {}_h \tilde{Y}_{sm}(\vec{n}) \quad (\text{A.11})$$

となる。このように表すと $SU(2)$ の添え字に関して対称化する操作による和がとられていたことがわかる。例えば、(A.10) のように $h > 0, m > 0$ の時は、 $s-h$ 個ある κ_{-}^2 の $SU(2)$ 添

字 2 を 1 に n 個だけ変えた場合に関して和をとっていることがわかる。このように $SU(2)$ 添字の完全対称テンソルを考えることで、1, 2 の添え字の個数が、 z 軸に量子化軸を固定したときの s_z の固有値に対応させられる。零質量 little group での議論と同様に、 $\kappa_{\pm} \rightarrow e^{i\phi} \kappa_{\pm}$ と位相回転しても \vec{n} の向きは変化しない。 $\kappa_{\pm} \rightarrow e^{\pm i\phi} \kappa_{\pm}$ の位相回転を行うと ${}_h\tilde{Y}_{sm}$ も

$$\kappa_{\pm} \rightarrow e^{\pm i\phi} \kappa_{\pm} \Rightarrow {}_h\tilde{Y}_{sm} \rightarrow e^{2hi\phi} {}_h\tilde{Y}_{sm} \quad (\text{A.12})$$

と位相回転する。しかし、これはスピン重みつき球面調和関数の正規直交性は変えないので、複素共役を取るときに ${}_hY_{s,-m} = {}_hY_{sm}^*$ と便利な式が成り立つような位相に κ_{\pm} を固定していた。

A.2 4次元 Lorentz 共変なスピン重みつき球面調和関数

では、Lorentz 変換性を持つ spinor-helicity formalism によって、重心系から Lorentz 変換した系でも扱えるような形式に球面調和関数を拡張しよう。時間方向を $u^{\mu} = (1, \vec{0})$ とするような静止系を選んだ時、運動量 $k^{\mu} = \omega(1, \vec{n})$ の零質量 spinor-helicity で三角 spinor と四角 spinor は $|k\rangle_b = \sqrt{2\omega} \kappa_{-}^{a=b}, |k\rangle^{\dot{a}} = \sqrt{2\omega} \kappa_{+}^{a=\dot{a}}$ と同一視できた。では、未来方向を向いた timelike なベクトル u^{μ} を一つとり spinor で定まる ${}_h\tilde{Y}_{j,m}(k; u, n)$ を

$${}_h\tilde{Y}_{j,m}(k; u, n) := \frac{1}{\langle k|u|k\rangle^j} \overbrace{[u_{(1}k] \cdots [u_{(1}k]}^{j-m}} \overbrace{[u_2k] \cdots [u_2k] \langle u_2k\rangle \cdots \langle u_2k\rangle}^{j+m} \quad (\text{A.13})$$

と定義し、ローレンツ共変な球面調和関数を

$${}_hY_{j,m}(k; u, n) = (-1)^m (2j)! \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi(j+m)!(j-m)!(j+h)!(j-h)!}} {}_h\tilde{Y}_{j,m}(k; u, n) \quad (\text{A.14})$$

と定義しよう。これは $u^{\mu} \rightarrow (1, \vec{0})$ の時 $\langle k|u|k\rangle = 2u \cdot k \xrightarrow{u=(1,\vec{0})} 2\omega$ となり三角 spinor と四角 spinor が持つ質量次元を確かに打ち消し $|u^I\rangle_a \xrightarrow{u=(1,\vec{0})} \delta_a^I$ となるので (A.10) を再現する。また、 n^{μ} はスピン量子化軸を表す spacelike なベクトルであるが有質量 little group の回転で自由に選べるので静止系で z 軸方向を選んだ時と同じようにとる。つまり、

$$n^{\mu} = \frac{1}{2} ([u^1|\sigma^{\mu}|u_1\rangle + \langle u^1|\bar{\sigma}^{\mu}|u_1\rangle) \quad (\text{A.15})$$

のようにとる。以降、このようにスピン量子化軸 n^{μ} を選んでいることにし、ローレンツ共変な球面調和関数の引数 n は省略する。すると完全性は

$$\frac{2}{\omega} \int d\Phi(k) \delta(k \cdot u - \omega) {}_hY_{l'm'}^* {}_hY_{lm} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.16})$$

となる。

付録 B

特殊関数

ここでは、本修士論文で登場する特殊関数について微分方程式や級数表示、積分表示、よく用いる性質をまとめる。特殊関数の性質はウェブサイト [49] にまとまっているので、ChatGPT 等で計算したい積分や無限和を計算させた後に参照し計算ミスがないかを確認すると効率よく研究で必要になる計算ができる。

B.1 Beta 関数と Gamma 関数と Polygamma 関数

B.1.1 Gamma 関数

Gamma 関数 $\Gamma(z)$ は階乗 $n!$ を複素変数 z に一般化したような関数で

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{B.1})$$

と定義できる。上の積分は $\text{Re } z > 0$ の領域で収束し、部分積分を行うことで階乗のような関係

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{B.2})$$

を示すことができる。例えば、 $\Gamma(1) = 1$ と計算できるので上の関係式を用いれば $\Gamma(n+1) = n!$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であり実際に階乗の一般化であることがわかる。この関係式を用いることで積分が収束している領域から $z \rightarrow z-1$ と解析接続を行うことができる。これを繰り返すことで $\Gamma(z)$ を複素数平面上で有理型関数 (meromorphic function) として定義することができる。上の関係式から分かるように正則でない点は $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であり、そこでは単純極となる:

$$\Gamma(z+n) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + (z \text{ について正則}). \quad (\text{B.3})$$

つまり、 $\Gamma(z)$ は $z \in \mathbb{C}$ で零点を持たず、 $z = -n$ で単純極を持つ。

さて、ガンマ関数を含む計算をする上でよく用いた関係式を述べる。まず、引数の複素共役 $z \rightarrow z^*$ を取るとそれはガンマ関数全体の複素共役になる。

$$\Gamma(z^*) = (\Gamma(z))^* \quad (\text{B.4})$$

である。そして Gamma 関数は相反公式 (reflection formula) をみたす。

■相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (\text{B.5})$$

が相反公式である。これらの性質を用いると特定の値での Gamma 関数の絶対値を計算することができる。例えば、引数が準虚数 $z = iy$ ($y \in \mathbb{R}$) の時

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y} \quad (\text{B.6})$$

であり、引数が $z = \frac{1}{2} + iy$ ($y \in \mathbb{R}$) の時は

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)} \quad (\text{B.7})$$

となる。また、Gamma 関数は n 倍角の公式

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nz - \frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) \quad (\text{B.8})$$

を持っている。具体的に $n = 2$ の時

■倍角の公式

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{B.9})$$

が成り立つ。

B.1.2 Beta 関数

Beta 関数 $B(a, b)$ は

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt \quad (\text{B.10})$$

のように定義される。この積分は $\operatorname{Re} a > 0$ かつ $\operatorname{Re} b > 0$ において収束し、

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (\text{B.11})$$

と Gamma 関数を用いて表すことができる。右辺を用いて解析接続すれば、Gamma 関数の極の位置を除いて Beta 関数を $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ に拡張できる。

B.1.3 Polygamma 関数

Polygamma 関数 $\psi^{(n)}(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は概してガンマ関数を微分した関数である。正確には、Gamma 関数を対数微分した digamma 関数 $\psi(z) = \psi^{(0)}(z)$ を

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (\text{B.12})$$

と定義する。すると、 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$\psi^{(n)}(z) := \frac{d}{dz} \psi^{(n-1)}(z) \quad (\text{B.13})$$

と定義される。相反公式は digamma 関数の表示では

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -\frac{\pi}{\tan(\pi z)} \quad (\text{B.14})$$

である。また、Polygamma 関数は

$$\psi^{(n)}(z+1) = \psi^{(n)}(z) + \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} \quad (\text{B.15})$$

という漸化式を持つ。

B.2 超幾何関数

超幾何関数 ${}_2F_1(a, b; c; z)$ は

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} z^n \quad (\text{B.16})$$

と無限級数で定義される。この無限級数は $|z| < 1$ で収束し正則関数を定めている。ここで、 $(a)_n$ は Pochhammer 記号であり $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ と定義する。この無限級数は以下の超幾何微分方程式

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} F + (c - (a+b+1)z) \frac{d}{dz} F - ab F(z) = 0 \quad (\text{B.17})$$

の解になっている。この微分方程式は $z = 0, 1, \infty$ に確定特異点を持っており、それぞれの確定特異点で無限級数表示で解を構成することができる。それら構成した解同士を解析接続することで超幾何関数を特異点以外の複素平面に定義できる。このように解析接続した結果として以下のような接続公式を得る。

■接続公式 $z = 0$ 周り と $z = 1$ 周りの接続公式は

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b, a+b-c+1; 1-z) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

であり、 $z = 0$ 周り と $z = \infty$ 周りの接続公式は

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, a+1-c, a+1-b; \frac{1}{z}) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, b+1-c, b+1-a; \frac{1}{z}) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

である。この接続公式を認めれば、 ${}_2F_1(a, b, c; 0) = 1$ からガウスの和公式

$${}_2F_1(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (\text{B.20})$$

が成立することがわかる。この和公式は $(1 - \cos \theta)^{-\Delta}$ を $e^{in\theta}$ ($n \in \mathbb{Z}$) 基底にフーリエ級数展開する時などで用いる。

B.3 Kummer 関数

Kummer 関数の性質については文献 [50] が詳しい。Kummer の微分方程式は

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (b-z) \frac{d}{dz} - a \right] w(z) = 0 \quad (\text{B.21})$$

であり、Kummer 関数を用いて一般解が記述できる。第一種 Kummer 関数 $M(a, b; z)$ は

$$M(a, b; z) = {}_1F_1(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} \quad (\text{B.22})$$

と定義される。この表示は $b \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時に有効で、 $b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ は極となっており、 a, z に関しては正則である。 $a \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時

$$M(a, b; z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} e^z z^{a-b} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \quad (\text{B.23})$$

という $z \rightarrow \infty$ での漸近形を持つ。 $b \notin \mathbb{Z}$ の時、第二種 Kummer 関数 $U(a, b; z)$ は

$$U(a, b; z) = \frac{\pi}{\sin(\pi b)} \left[\frac{M(a, b; z)}{\Gamma(1+a-b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b; z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right] \xrightarrow{z \rightarrow \infty} z^{-a} \quad (\text{B.24})$$

とかける。ここで ${}_1F_1$ は超幾何関数、 Γ はガンマ関数である。 $a \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}, b \in \mathbb{Z}_{> 0}$ の時、第二種 Kummer 関数 $U(a, b; z)$ は

$$U(a, n+1; z) = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(a-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(n+1)_k k!} z^k (\log z + \psi(a+k) - \psi(1+k) - \psi(1+n+k)) \\ + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)! (1+k-a)_{n-k}}{(n-k)!} z^{-k} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$
(B.25)

とかける。ここで $\psi(x)$ は digamma 関数である。2 章において、Kummer 関数を用いて球対称ブラックホール時空でのモード解を近似できることを議論した。角運動量 l , Schwarzschild 半径 r_s , モードの角振動数 ω , 観測者の位置 r , とすると、

$$a = l + 1 - ir_s \omega, \quad b = 2l + 2, \quad z = -2ir\omega$$
(B.26)

と上のパラメタ a, b と引数 z と関係していたことを思い出そう。Schwarzschild 半径 $r_s = 1$, 観測者の位置 $r = 100$, 軌道角運動量 $l = 0$ の時、第一種 Kummer 関数を図示すると図 B.1 になる。また、Mathematica で軌道角運動量 l を $l = 0$ とすると第二種 Kummer 関数は発散しグラフが出力されないという技術的な理由により、Schwarzschild 半径 $r_s = 1$, 観測者の位置 $r = 100$, 軌道角運動量 $l = 0.01$ の時、第二種 Kummer 関数を図示すると図 B.2 になる。

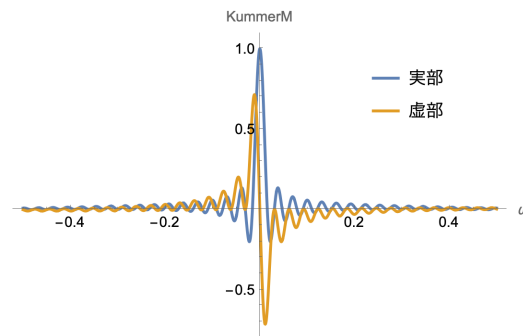


図 B.1 $l = 0, r_s = 1, r = 100$ の時の第一種 Kummer 関数の周波数依存性

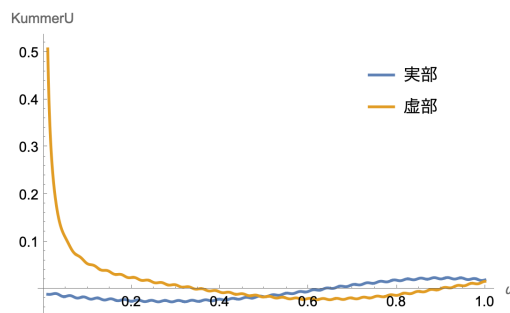


図 B.2 $l = 0.01, r_s = 1, r = 100$ の時の第二種 Kummer 関数の周波数依存性

付録 C

Love 数

C.1 定義

一般相対論における Love 数の定義を行う。直観的に Love 数を説明すると、外場として印加した重力場に対応して物がどれだけ歪むかを表す数値である。電磁場との類比で説明してみよう。誘電体に電場を印加すると誘電体には電気双極子モーメントが生じるが、この電気双極子に対応するものが Love 数である。

まず、Newton 重力で時間に依存しない外場を加えた時を考える。この時の、Love 数は特に static tidal Love number と呼ぶ。Newton 重力ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x})$ を外場によるポテンシャル $\Phi(\mathbf{x})_{ex}$ とその応答によるポテンシャル $\Phi(\mathbf{x})_{res}$ に分ける。我々が観測する $r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ では

$$\nabla^2(\Phi(\mathbf{x})_{ex} + \Phi(\mathbf{x})_{res}) = 0 \quad (\text{C.1})$$

とラプラス方程式が成立する。ポテンシャルを球面調和関数 Y_{lm} で展開すると

$$\Phi(r) = -\frac{G_N M}{r} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=l}^l Y_{lm} E_{lm} r^l \left(1 + k_{lm} \left(\frac{2G_N M}{r} \right)^{2l+1} \right) \quad (\text{C.2})$$

となる。第 1 項が中心にある球対称重力源（一般相対論では Schwarzschild ブラックホールに対応）が作り出すポテンシャル、 r^l に比例する項が印加した時間に依存しない重力ポテンシャル（連星系では伴星からのポテンシャル）、そして、 k_{lm} を係数とする項が重力源の潮汐変形による応答ポテンシャルであり k_{lm} が Love 数である。

これを一般相対論の議論に拡張する。計量 $g_{\mu\nu}$ を平坦時空計量 $\eta_{\mu\nu}$ と摂動計量 $h_{\mu\nu}$ とに分ける ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$)。重力波源から十分離れた観測者が感じる弱重力場での Newton ポテンシャルと計量の関係は $2\Phi = -h_{tt}$ であるから、線形化した Einstein 方程式を解き r^{-l-1} の項の係数と r^l の項の係数の比が Love 数となる。つまり、ブラックホール摂動論の方程式を解けば良い。ここで、ブラックホール摂動論の式として Kerr 時空についての Teukolsky 方程式を考え、境界条件として事象の地平面 $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ においてブラックホールに

入射する波動のみという境界条件を課す。この時、 $r \rightarrow \infty$ における漸近形は

$$B_{-slm}^{in} \frac{e^{-i\omega r_*}}{r} + B_{-slm}^{ex} r^{2s-1} e^{i\omega r_*} \quad (\text{C.3})$$

となる。ここで、 s は摂動場のスピンである。無限遠から入射する波の振幅 B_{-slm}^{in} と無限遠に放射する波の振幅 B_{-slm}^{ex} を用いて、ブラックホール摂動論における反射振幅がもとまる。Worldline EFT [44–46] を用いて、印加した外場からなる higher operator を含む振幅とブラックホール摂動論での振幅をマッチングし、Wilson 係数を求めることで Love 数が計算できる。ここで定義された Love 数は静的な潮汐力による変形率に関してであった。Kerr 時空の static Love 数は消えることが知られている。これはブラックホール無毛定理と関係しており、ブラックホール摂動論のマスター方程式が持つ Ladder 対称性を用いて説明できる [41–43].

さらに、時間依存する潮汐力をブラックホールに印加する状況を考えよう。この時、Love 数は $k_{lm} = \kappa_{lm} + i\nu_{lm}$ と虚部をもち減衰効果 ν_{lm} が生じる。周波数依存する Love 数は Worldline EFT を用いて記述されており、Schwarzschild, Kerr ブラックホールそれぞれについて計算されている [51–53].

参考文献

- [1] Srednicki, M. (2007). Quantum field theory. Cambridge university press.
- [2] Berti, E., Cardoso, V., Carullo, G., Abedi, J., Afshordi, N., Albanesi, S., ... & Zhu, H. (2025). Black hole spectroscopy: from theory to experiment. arXiv preprint arXiv:2505.23895.
- [3] Andersson, N. (1997). Evolving test fields in a black-hole geometry. *Physical Review D*, 55(2), 468.
- [4] Oshita, N., & Cardoso, V. (2025). Reconstruction of ringdown with excitation factors. *Physical Review D*, 111(10), 104043.
- [5] Miyachi, T., Namba, R., Omiya, H., & Oshita, N. (2025). Path to an exact WKB analysis of black hole quasinormal modes. *Physical Review D*, 111(12), 124045.
- [6] Leaver, E. W. (1985). An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 402(1823), 285-298.
- [7] Leaver, E. W. (1986). Solutions to a generalized spheroidal wave equation: Teukolsky's equations in general relativity, and the two - center problem in molecular quantum mechanics. *Journal of mathematical physics*, 27(5), 1238-1265.
- [8] Leaver, E. W. (1986). Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry. *Physical Review D*, 34(2), 384.
- [9] Andersson, N., & Howls, C. J. (2004). The asymptotic quasinormal mode spectrum of non-rotating black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 21(6), 1623-1642.
- [10] Motl, L., & Neitzke, A. (2003). Asymptotic black hole quasinormal frequencies.
- [11] Price, R. H. (1972). Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. I. Scalar and gravitational perturbations. *Physical Review D*, 5(10), 2419.
- [12] Teukolsky, S. A. (1973). Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *Astrophysical Journal*, Vol. 185, pp. 635-648 (1973), 185, 635-648.
- [13] 中野寛之, 佐合紀親 著, 重力波・摂動論, 朝倉書店, 東京, 2022
- [14] Elvang, H., & Huang, Y. T. (2013). Scattering amplitudes. arXiv preprint arXiv:1308.1697.

-
- [15] Arkani-Hamed, N., Huang, T. C., & Huang, Y. T. (2021). Scattering amplitudes for all masses and spins. *Journal of High Energy Physics*, 2021(11), 1-77.
- [16] Arkani-Hamed, N., & Kaplan, J. (2008). On tree amplitudes in gauge theory and gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2008(04), 076.
- [17] Kosower, D. A., Maybee, B., & O'Connell, D. (2019). Amplitudes, observables, and classical scattering. *Journal of High Energy Physics*, 2019(2), 1-69. [arXiv:1811.10950]
- [18] Cristofoli, A., Gonzo, R., Kosower, D. A., & O'Connell, D. (2022). Waveforms from amplitudes. *Physical Review D*, 106(5), 056007. [arXiv:2107.10193]
- [19] Caron-Huot, S., Giroux, M., Hannesdottir, H. S., & Mizera, S. (2024). What can be measured asymptotically?. *Journal of High Energy Physics*, 2024(1), 1-63.
- [20] Bern, Z., & Huang, Y. T. (2011). Basics of generalized unitarity. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(45), 454003.
- [21] Arkani-Hamed, N., Cachazo, F., & Kaplan, J. (2010). What is the simplest quantum field theory?. *Journal of High Energy Physics*, 2010(9), 1-92.
- [22] Anastasiou, C., Britto, R., Feng, B., Kunszt, Z., & Mastroia, P. (2007). D-dimensional unitarity cut method. *Physics Letters B*, 645(2-3), 213-216.
- [23] Britto, R., & Feng, B. (2008). Integral coefficients for one-loop amplitudes. *Journal of High Energy Physics*, 2008(02), 095.
- [24] Britto, R., & Feng, B. (2007). Unitarity cuts with massive propagators and algebraic expressions for coefficients. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 75(10), 105006.
- [25] Ossola, G., Papadopoulos, C. G., & Pittau, R. (2007). Reducing full one-loop amplitudes to scalar integrals at the integrand level. *Nuclear Physics B*, 763(1-2), 147-169
- [26] Britto, R., Feng, B., & Mastroia, P. (2008). Closed-form decomposition of one-loop massive amplitudes. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 78(2), 025031.
- [27] Forde, D. (2007). Direct extraction of one-loop integral coefficients. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 75(12), 125019.
- [28] Bern, Z., & Morgan, A. G. (1996). Massive loop amplitudes from unitarity. *Nuclear Physics B*, 467(3), 479-509.
- [29] Bern, Z., Dixon, L., & Kosower, D. A. (1996). Progress in one-loop QCD computations. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 46(1), 109-148.
- [30] Badger, S. D. (2009). Direct extraction of one loop rational terms. *Journal of High Energy Physics*, 2009(01), 049.
- [31] De Angelis, S., Novichkov, P. P., & Gonzo, R. (2024). Spinning waveforms from the Kosower-Maybee-O'Connell formalism at leading order. *Physical Review D*, 110(4), L041502.[arXiv:2309.17429]

- [32] Aoude, R., & Ochirov, A. (2021). Classical observables from coherent-spin amplitudes. *Journal of High Energy Physics*, 2021(10), 1-42.
- [33] Vines, J. (2018). Scattering of two spinning black holes in post-Minkowskian gravity, to all orders in spin, and effective-one-body mappings. *Classical and Quantum Gravity*, 35(8), 084002.
- [34] Jones, C. R., & Ruf, M. S. (2024). Absorptive effects and classical black hole scattering. *Journal of High Energy Physics*, 2024(3), 1-36.[arXiv:2310.00069]
- [35] Starobinskii, A. A., & Churilov, S. M. (1973). Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating black hole. *Zh. eksp. teor. Fiz*, 65(3), 3-11.
- [36] Page, D. N. (1976). Particle emission rates from a black hole. II. Massless particles from a rotating hole. *Physical Review D*, 14(12), 3260.
- [37] Aoki, K., Cristofoli, A., & Huang, Y. T. (2025). On-shell approach to black hole mergers. *Journal of High Energy Physics*, 2025(1), 1-42. [arXiv:2410.13632 [hep-th]].
- [38] Aoki, K., Cristofoli, A., Jeong, H., Sergola, M., & Yoshimura, K. (2025). Quantum effects for black holes with on-shell amplitudes. *Journal of High Energy Physics*, 2025(12), 163.
- [39] Arkani-Hamed, N., Cachazo, F., Cheung, C., & Kaplan, J. (2010). A duality for the S matrix. *Journal of High Energy Physics*, 2010(3), 1-70.
- [40] Cachazo, F., & Guevara, A. (2020). Leading singularities and classical gravitational scattering. *Journal of High Energy Physics*, 2020(2), 1-32.
- [41] Hui, L., Joyce, A., Penco, R., Santoni, L., & Solomon, A. R. (2021). Static response and Love numbers of Schwarzschild black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(04), 052.
- [42] Hui, L., Joyce, A., Penco, R., Santoni, L., & Solomon, A. R. (2022). Ladder symmetries of black holes. Implications for love numbers and no-hair theorems. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(01), 032.
- [43] Charalambous, P., Dubovsky, S., & Ivanov, M. M. (2021). On the vanishing of Love numbers for Kerr black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2021(5), 1-56.
- [44] Goldberger, W. D., & Rothstein, I. Z. (2006). Effective field theory of gravity for extended objects. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 73(10), 104029.
- [45] Goldberger, W. D., & Rothstein, I. Z. (2005). Dissipative effects in the worldline approach to black hole dynamics. arXiv preprint hep-th/0511133.
- [46] Porto, R. A. (2016). The effective field theorist's approach to gravitational dynamics. *Physics Reports*, 633, 1-104.
- [47] Damgaard, P. H., Hansen, E. R., Planté, L., & Vanhove, P. (2023). The relation between KMOC and worldline formalisms for classical gravity. *Journal of High Energy*

-
- Physics, 2023(9), 1-34.
- [48] Breuer, R. A., Ryan, M. P., & Waller, S. (1977). Some properties of spin-weighted spheroidal harmonics. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 358(1692), 71-86.
- [49] Olver F. W. J., Olde Daalhuis A. B., Lozier D. W., Schneider B. I., Boisvert R. F., Clark C. W., Miller B. R., Saunders B. V., Cohl H. S., McClain M. A. (Eds.), *NIST Digital Library of Mathematical Functions*
- [50] Mathews Jr, W. N., Esrick, M. A., Teoh, Z. Y., & Freericks, J. K. (2021). A physicist's guide to the solution of Kummer's equation and confluent hypergeometric functions. arXiv preprint arXiv:2111.04852.
- [51] Saketh, M. V. S., Zhou, Z., & Ivanov, M. M. (2024). Dynamical tidal response of Kerr black holes from scattering amplitudes. *Physical Review D*, 109(6), 064058.
- [52] Perry, M., & Rodriguez, M. J. (2023). Dynamical Love numbers for Kerr black holes. arXiv preprint arXiv:2310.03660.
- [53] Chia, H. S. (2021). Tidal deformation and dissipation of rotating black holes. *Physical Review D*, 104(2), 024013.